Scuola Interateneo di Specializzazione per la Formazione
degli Insegnanti della Scuola Secondaria del Veneto
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
INDIRIZZO SCIENTIFICO TECNOLOGICO

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

DAI LUCIDI DELLE LEZIONI
Docente Margherita Motteran
05 aprile 2005

I vettori

1. Definizione di vettore

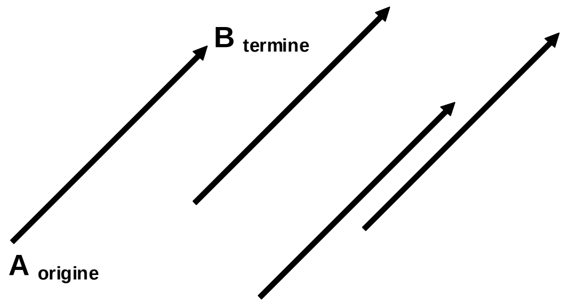


Figura 1

Un **segmento orientato** AB è una coppia ordinata di punti dello spazio, che viene rappresentata graficamente con una freccia che ha **origine** in A e **termine** in B (cfr. fig.1)..

La **direzione** di AB è la direzione della retta passante per A e B, il **verso** di AB è quello che va da A a B. La l**unghezza** del segmento AB viene detta norma o modulo di AB.

Due segmenti orientati sono **equivalenti** se hanno uguale la lunghezza, la direzione e il verso.
L'insieme (la **classe**) dei segmenti orientati equivalenti ad un dato segmento orientato AB viene definito **vettore dello spazio** e viene spesso indicato con il simbolo $\vec{AB}$, o anche *v*, o **v.** Indicheremo con $|\mathbf{v}|$ la misura della lunghezza di **v** (rispetto una prefissata unità).
Il vettore nullo è rappresentato da segmenti aventi gli estremi A e B coincidenti. Il vettore opposto di un vettore **v** è un vettore avente la stessa lunghezza e la stessa direzione di **v** ma verso opposto e si indica con **–v**.

2. Coordinate di un vettore

Dato, nello spazio, un vettore **v** e un sistema di assi cartesiani ortogonali, si può pensare di rappresentare il vettore **v** con un segmento orientato OP avente l'origine coincidente con l'origine degli assi. Se questo procedimento viene ripetuto per tutti i vettori dello spazio, si genera una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori dello spazio e l'insieme dei punti P e quindi si crea anche una corrispondenza biunivoca tra i vettori dello spazio e le terne (x,y,z) di numeri reali che rappresentano le proiezioni di ogni punto termine sugli assi (fig. 2). Dal teorema di Pitagora risulta che, dato un vettore **v** ≡ (x,y,z),

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

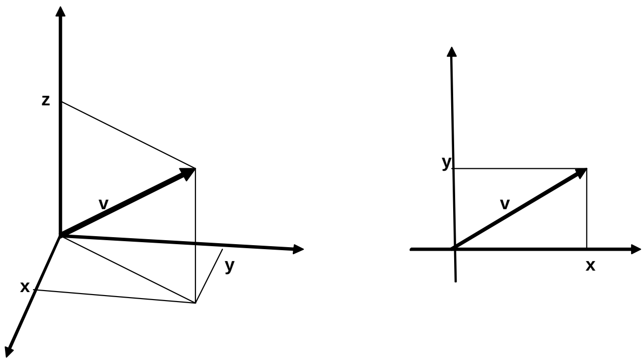


Figura 2

Se limitiamo le nostre considerazioni a vettori posti in un solo piano, allora il riferimento per le coordinate sarà costituito dal piano cartesiano ed avremo **v** ≡ (x,y),

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. Somma e differenza di due o più vettori

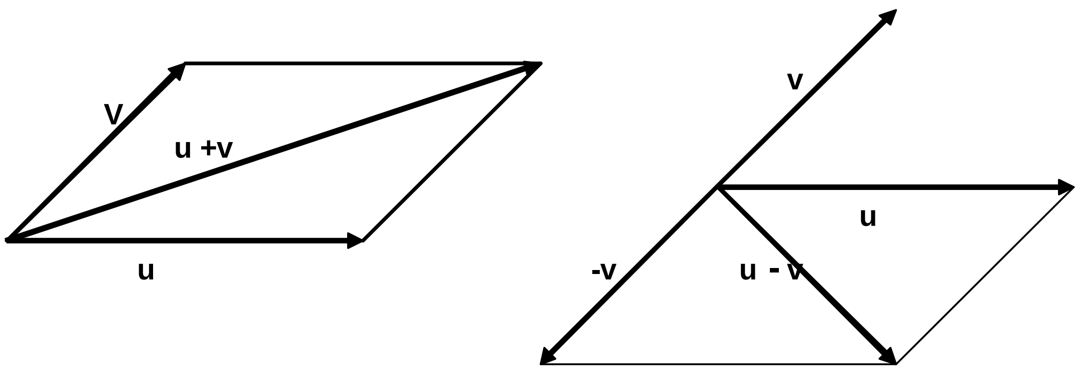


Figura 3

Nello spazio cartesiano:

Se **v** ≡ (x,y,z) e **u**≡ (l,m,n) → **u +v** ≡ (x+l,y+m,z+n)

u − v ≡ (x-l,y-m,z-n)

Nel piano cartesiano:

Se **v** ≡ (x,y) e **u**≡ (l,m) → **u +v** ≡ (x+l,y+m)

u − v ≡ (x-l,y-m,)

4. Prodotto di uno scalare per un vettore

Il prodotto di un numero reale λ per un vettore **v** è un vettore **h** che ha la stessa direzione di **v**, stesso verso di **v** se λ>0 ma quello opposto se λ<0, e infine tale che |**h**| = λ|**v**|
Nello spazio cartesiano:

Se **v** ≡ (x,y,z) → **h** ≡ (λx,λy,λz)

Nel piano cartesiano:

Se **v** ≡ (x,y) → **h** ≡ (λx,λy)

5. Prodotto scalare di due vettori *u* e *v*

Siano **u** e **v** due vettori e sia α l'angolo convesso compreso fra essi.
Si definisce **prodotto scalare** di **u** e **v** , che indichiamo con **u** × **v,** il **numero reale**

u × **v** = | **u** | × |**v** |× cosα

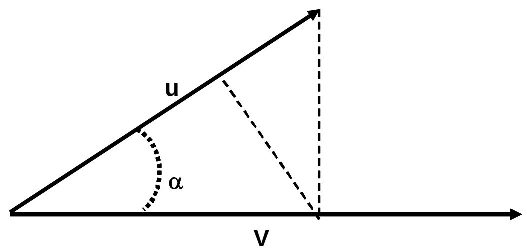


Figura 4

Nello spazio cartesiano:

Se **v** ≡ (x,y,z) e **u**≡ (l,m,n) →

u × **v**≡ xl + ym + zn

Nel piano cartesiano:

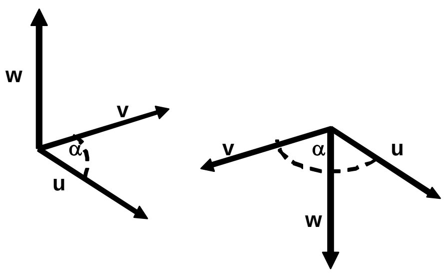
Se **v** ≡ (x,y) e **u**≡ (l,m) → **u** × **v** ≡ xl + ym

Esempio
Calcolo del lavoro compiuto da una forza costante.

6. Prodotto vettoriale di due vettori *u* e *v*

Siano **u** e **v** due vettori e sia α l'angolo convesso compreso fra essi.
Si definisce **prodotto vettoriale** di **u** e **v ,** che si indica con **u**∧**v,** un vettore, che indicheremo con **w** , così definito (nelle righe che seguono a volte denoteremo **u,v,w** rispettivamente, con $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **,** $\vec{w}$ **)**:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} : \begin{cases} \text{mod}ulo : \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot sen\alpha \\ direzione : perpemdicolare\, al\ piano\, di\, \vec{u}\, e\, \vec{v} \\ verso : tale\, che\ il\ triedro\ orientato\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\, sia\ destrorso \end{cases}$$



Alcuni autori, pensando di facilitare la determinazione del verso di $\vec{w}$, suggeriscono di determinare il verso del prodotto vettoriale di due vettori con la regola "della mano destra" o con altri metodi empirici.

Nello spazio cartesiano, dati due vettori **u** e **v,** tali che **u** ≡ (l,m,n) e **v** ≡ (x,y,z), si possono calcolare le coordinate del vettore $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ a partire dalle coordinate dei vettori dati.
Infatti, dopo avere indicato **w** ≡ (a,b,c), si dimostra che
a = mz-yn, b = nx-lz, c = ly-mx,

che sono i complementi algebrici di a, di b e di c nella matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Qualche esempio di prodotto vettoriale:

- **momento di una forza rispetto a un punto**
- **forza agente su una carica elettrica *q* che si muove con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$**

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Nota didattica:
La presentazione dei vettori risulta più chiara se è accompagnata da rappresentazioni grafiche adeguate.
Qualora si considerino valori numerici dei moduli, è importante utilizzare rappresentazioni in scala corrette ed esplicitare le unità di misura utilizzate.