SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE
per
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO
Anno accademico 2005-2006

FONDAMENTI STORICO-EPISTEMOLOGICI della MATEMATICA

Prof. Carlo Minnaja

8.3.2006 (3 ore)

Introduzione al corso

Il concetto di funzione come relazione tra due insiemi A e B, non necessariamente collegata ad un algoritmo tramite il quale dato un elemento di A si possa trovare l'argomento corrispondente di B con dei calcoli.

Esempio: data una nave di cui si conoscono le caratteristiche, trovare l'età del capitano.

Richiamo della nomenclatura sugli insiemi: simboli di *contenuto in senso stretto* ($\subset$), *contenuto in senso largo* ($\subseteq$), *contenente in senso stretto* ($\supset$) *contenente in senso largo* ($\supseteq$) (e le loro ovvie negazioni), *intersezione* ($\cap$), *unione* ($\cup$), *differenza simmetrica* ($\triangle$), *appartenenza* ($\in$), *esistenza* ($\exists$).

Introduzione elementare alla teoria degli insiemi: famiglia *chiusa* rispetto alle operazioni binarie viste sopra.

Un insieme è noto quando se ne conoscono gli elementi. Questi si possono elencare (insieme conosciuto per *estensione*) o si può dare una legge che li individui (insieme conosciuto per *comprensione*).

Si può parlare di un insieme anche quando non se ne conoscano esplicitamente gli elementi, cioè non si sappia se un elemento vi appartiene o no?

Postulato di Zermelo: Data una famiglia di infiniti insiemi A_i, ciascuno composto di infiniti elementi a_{i_k} esiste sempre l'insieme costituito da un elemento per ogni A_i.

Traduzione antropomorfa: dati infiniti sacchi ciascuno con infiniti fagioli, esiste sempre la zuppa di fagioli costituita da un fagiolo per ogni sacco.

Se si accetta questo postulato, si accetta il fatto di poter parlare di un insieme senza sapere come sia fatto, ritenendo che esista sempre una legge per costruirlo.

Differenza tra *definizione*, *postulato*, *teorema*

L'accettazione oppure no di un postulato implica la costruzione di strutture diverse.

Il *V postulato di Euclide*, o *postulato delle parallele* asserisce: *data una retta r ed un punto P fuori di essa esiste una ed una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data*

Il postulato, che figurava come quinto nella successione di postulati degli *Elementi* di Euclide, appariva assai diverso dagli altri postulati, come: *il punto non ha dimensioni*, oppure: *la retta ha una sola dimensione*, o: *per due punti passa una retta ed una sola.* Esso quindi sembrava passibile di dimostrazione, e molti matematici durante i secoli cercarono di dimostrarlo (da notare: che passi almeno una retta parallela a quella data è ovvio, basta tirare la perpendicolare dal punto alla retta e quindi la perpendicolare a questa perpendicolare passante per il punto: essa risulta parallela alla retta di partenza). Vari matematici pensarono di aver trovato la dimostrazione, ma sempre c'era un punto di questa in cui il ragionamento implicava una accettazione del postulato stesso o di un asserto equivalente. Molto spesso le dimostrazioni erano tentate *per assurdo*, cioè negando la tesi e cercando di arrivare ad un punto che negava l'ipotesi o postulati precedenti.

Soltanto nell'Ottocento si cominciò a percepire che la negazione della tesi conduceva ad una geometria diversa da quella fino allora considerata, ma internamente coerente anch'essa. Dapprima Gauss, e quindi Riemann, pensarono che non ci fosse nessuna parallela tirata da un punto esterno ad una retta data. Successivamente l'ungherese Janos Bolyai e il russo Nikolaj Lobaćevskij costruirono una geometria che ammetteva l'esistenza di infinite rette parallele ad una retta data tirate da un punto fuori di essa.

Queste geometrie possono essere presentate in questo modo. Supponiamo di avere una retta e un punto fuori di essa, da cui traguardiamo la retta. Supponiamo che da un punto della retta partano dei punti, in numero qualsiasi, che corrono lungo la retta ad una velocità qualsiasi. Traguardando questi punti dal punto esterno, quanti riusciamo a seguirne? Li vediamo e riusciamo a seguirli tutti? Ce n'è uno solo che non riusciamo a seguire? Ce ne sono infiniti che non riusciamo a seguire?

A seconda della risposta che diamo ne conseguono geometrie diverse. Se diciamo che riusciamo a seguirli tutti (e questa è la risposta che risulta più frequente tra gli scolari) abbiamo costruito una geometria in cui non esiste parallelismo: infatti se li vediamo tutti ciò significa che non ce n'è nessuno che non riusciamo a vedere dal punto esterno. Se diciamo che ce ne sono infiniti che non riusciamo a seguire, abbiamo costruito una geometria in cui ci sono infinite parallele ad una retta data tirate da un punto esterno. Se diciamo che c'è un solo punto che non riusciamo a vedere abbiamo scelto una geometria in cui la parallela ad una retta data tirata da un punto fuori di essa è una sola. La prima geometria è quella di Gaus-Riemann, la seconda è quella di Bolyai-Lobaćevskij, la terza è quella di Euclide, cioè congruente con il V postulato.

Numerazione

A Vestonice, attualmente nella Repubblica Ceca, è stata trovata una mandibola di lupo con delle tacche, delle quali era più profondamente incisa una ogni cinque. La datazione del reperto è da collocarsi tra i 25.000 e i 30.000 anni fa.

Le lettere romane che indicavano numeri vengono solitamente spiegate così: il "5" era scritto "V" e si credeva che ciò provenisse dalla forma della mano aperta, mentre il "10" scritto "X" si pensava provenisse dalla forma di due mani aperte messe specularmente una sull'altra. Interpretazioni successive hanno invece spiegato che il segno "V" indica semplicemente una incisione più marcata, per ottenere la quale si strisciava a ventaglio la lama che imprimeva la tacca, e il segno "X" proviene dalla stessa strisciatura, fatta facendo ruotare la lama in un punto intermedio, in modo che essa raschiasse sia sopra che sotto il centro di rotazione.

La notazione dei romani era principalmente additiva (un segno vicino all'altro indicava una addizione del secondo al primo) e parzialmente sottrattiva (un segno posto prima di un altro indicava una sottrazione del primo dal successivo). Una notazione siffatta era estremamente scomoda per i calcoli che non fossero assolutamente elementari.

La notazione posizionale fu introdotta in Europa dagli arabi, che la appresero dagli indiani. In tale notazione il valore di un segno dipende, oltre che dal segno stesso, anche dalla posizione che il segno ha rispetto agli altri. Il numero 1874 indica il risultato del seguente insieme di operazioni:

$$1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

I termini "algebra" e "algoritmo" provengono dall'arabo: "algebra" indica il passaggio di una quantità da un membro all'altro di un'equazione, mentre "algoritmo" proviene dal nome del matematico persiano Al-Kwarizmi, autore di un trattato appunto di algebra.

Solitamente vengono presentati agli alunni dapprima i numeri *cardinali*: 1, 2, 3, ..., e dopo quelli ordinali: primo, secondo, terzo, ... In realtà i numeri sono tutti ordinali, perché quando contiamo sulle dita mettiamo i numeri in fila, e quindi consideriamo il loro posto in una fila (*ordinali*). Anche se ci vengono presentati molti punti in una nuvola irregolare non riusciremmo a contarli di colpo, ma ci riusciamo se costituiamo una linea che li unisce e sulla quale i punti vengono disposti in un certo ordine.