Scuola Interateneo di Specializzazione per la Formazione
degli Insegnanti della Scuola Secondaria del Veneto
ANNO ACCADEMICO 2006-2007
INDIRIZZO TECNOLOGICO

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

DAI LUCIDI DELLE LEZIONI
Docente Margherita Motteran
aprile 2007

1.Proprietà focali dell'ellisse

1a. Introduzione

Definizione: Dicesi *ellisse* il luogo geometrico dei punti di un piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*.

Indicati questi fuochi con F ed F', per ogni punto P dell'ellisse è

$$\overline{FP}+\overline{F'P}=2a\ ,$$

ove si è indicata con *2a* la somma costante delle misure di *FP* e di *F'P*.

Dopo

- aver introdotto il sistema di assi cartesiani ortogonali avente come asse delle ascisse la retta FF', detta *asse focale* dell'ellisse, e come origine il punto medio del segmento FF',
- aver indicato con *2c* la misura del segmento FF' (→ F = (-c,0); F'= (c,0))
- aver posto $b^2 = a^2 - c^2$,
- avere indicato con P (x,y) un generico punto dell'ellisse

si perviene all'equazione

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

che rappresenta l'ellisse ed è detta equazione *canonica*.

1b. Proprietà focali dell'ellisse riferite alle tangenti

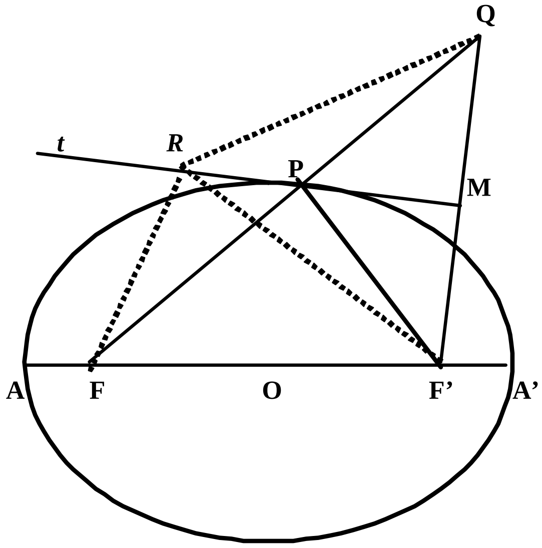

Figura 1

Consideriamo l'ellisse rappresentata in figura 1.
Prolunghiamo il raggio focale FP, dalla parte di P, di un segmento PQ =F'P.
Poiché $\overline{FQ}=\overline{FP}+\overline{PQ}=\overline{FP}+\overline{PF'}$
→ $\overline{FQ}=2a$
Congiungiamo F' con Q. Pertanto, il triangolo F'PQ è isoscele e la retta *t* passante per P e perpendicolare a F'Q è bisettrice dell'angolo F'PQ e asse del segmento F'Q.
Per qualsiasi punto R ≠ P di *t* si ha $\overline{FR}+\overline{RF'}=\overline{FR}+\overline{RQ}$.
Poiché $\overline{FR}+\overline{RQ}\neq\overline{FQ}$ → $\overline{FR}+\overline{RF'}\neq 2a$

→R non può appartenere all'ellisse → la retta *t* ha in comune con l'ellisse soltanto il punto P ed è quindi tangente all'ellisse.

L'angolo FPF' è adiacente a F'PQ → la retta passante per P e perpendicolare a *t* è la bisettrice dell'angolo FPF'

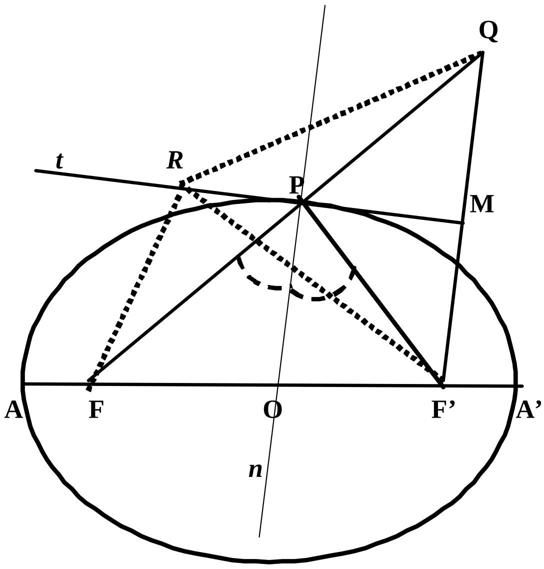

Figura 2

Se giocassimo su un biliardo ellittico, ogni sferetta che seguisse una traiettoria rettilinea passante per uno dei fuochi, dopo un urto elastico sul bordo rimbalzerebbe con un angolo di riflessione uguale a quello d'incidenza e quindi ……..

2.Proprietà focali della parabola

2a. Introduzione

1b. La parabola

Definizione: Dicesi *parabola* il luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.

Dopo

- aver introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali avente l' asse delle ascisse parallela alla direttrice e aver denotato con "d" l'ordinata di un punto generico della direttrice (→lequazione della direttrice: y = d),
- aver indicato con F(p,q) il fuoco della parabola, con $q \neq d$,
- aver indicato con P (x,y) un generico punto della parabola

si perviene all'equazione

$$\textbf{(2)} \qquad y = ax^2 + bx + c$$

<u>NB:</u> Le equazioni del tipo della (2) rappresentano geometricamente tutte e sole le parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate del sistema di riferimento cartesiano adottato.

Per le parabole rappresentate da equazioni del tipo della (2):

- equazione dell'asse di simmetria: $x = \frac{-b}{2a}$
- coordinate del vertice: $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$
- coordinate del fuoco $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$
- equazione della direttrice $y = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{2a}$

2b. Proprietà focali della parabola riferite alle tangenti

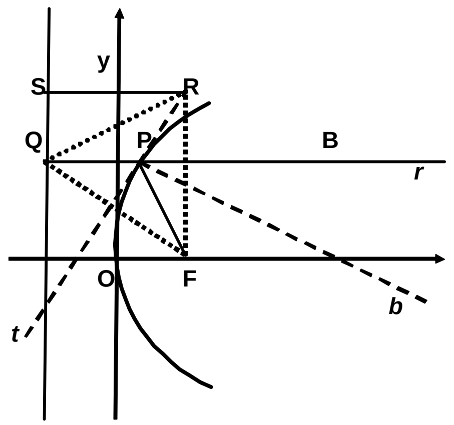

Figura 3

Consideriamo la parabola rappresentata in figura 3, ove il sistema cartesiano di riferimento ha l'origine nel vertice della parabola e l'asse delle ordinate parallelo alla direttrice della stessa.

Consideriamo una retta *r* parallela all'asse della parabola e indichiamo con P il punto in cui questa retta interseca la parabola. Sia Q il punto in cui questa retta, interseca la direttrice →

FP ≅ PQ →

il triangolo FPQ è isoscele e quindi la retta *t,* passante per P e perpendicolare a QF è bisettrice dell'angolo FPQ e asse del segmento QF. → Se R ≠ P è un generico punto di *t*,

QR ≅ RF , QR > SR, → RF > SR,

→ R non può appartenere alla parabola → la retta *t* incontra la parabola solo nel punto P.
→ *t* è la retta tangente alla parabola nel punto P.

Gli angoli QPF e BPF sono adiacenti e la retta *t* è bisettrice dell'angolo QPF → la retta perpendicolare a *t* e passante per P biseca l'angolo BPF. → se una sorgente luminosa puntiforme è posta nel fuoco della parabola i raggi luminosi che partono da F e si "riflettono" sulla parabola, dopo la riflessione, proseguono in direzione parallela all'asse della parabola. Invece, se un fascio di luce parallelo all'asse della parabola si riflette su di essa …