

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

LUCIDI DELLE LEZIONI
Docente Margherita Motteran
15 marzo 2007

1. Introduzione

Una domanda:

Quale matematica insegnare nelle discipline in cui si pongono problemi che si risolvono utilizzando conoscenze e abilità matematiche anche non banali?

I libri di testo delle discipline di area professionale contengono spesso riferimenti a concetti matematici, di cui spesso forniscono descrizioni molto sintetiche, finalizzate all'applicazione. E' importante che i docenti siano in grado di valutare la correttezza di queste presentazioni e di proporre agli studenti riferimenti concettuali corretti.

In questo corso si proporrà una rivisitazione di alcuni argomenti fondamentali di frequente utilizzazione nella risoluzione di problemi tecnico-scientifici e si indicheranno alcune difficoltà incontrate dagli studenti.

Queste note contengono gli schemi delle lezioni. Un'esposizione più dettagliata è contenuta nel testo base indicato per il corso

2. Da ricordare a proposito di insiemi:

La definizione di Cantor (1845-1918):

“Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme.”

Due modi per definire un insieme:

“Insieme P_{20} dei numeri pari minori di 20”

- un elenco (definizione per estensione)
 $P_{20} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
- una proprietà
 $P_{20} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ è divisibile per } 2, n \text{ minore di } 20\}$

Osserviamo la frase:

“ n è divisibile per 2”

E' un **predicato**

E' una frase in cui interviene un simbolo, nel nostro caso “ n ”, che rappresenta un generico numero naturale. Per ciascun fissato numero naturale n tale predicato può essere vero oppure (*aut*) falso.

Esso può essere rappresentato da una scrittura, ad esempio: $P(n)$

	$P(8)$	vero
→	$P(11)$	falso

In EXCEL: “Funzione” logica: SE

	A	B	C
1	2	3	=SE(A1=B1;"V";"F")
2	2	2	=SE(A2=B2;"V";"F")
3			

	A	B	C
1	2	3	F
2	2	2	V
3			

Test	<input type="text"/>	= logico
Se_vero	<input type="text"/>	= qualsiasi
Se_falso	<input type="text"/>	=qualsiasi

L’implicazione

Le “trappole” di “SE ... ALLORA ...”

“Se ho, nel portafoglio, 100 euro posso pagare la contravvenzione.”

- Non ho 100 euro in contanti, ma pago ugualmente con il Bancomat....
- Ho fatto un’affermazione falsa?

Nel linguaggio degli insiemi, ma anche nel linguaggio ordinario, i quantificatori giocano un ruolo importante (e molti studenti incontrano difficoltà a comprenderne il significato)

QUANTIFICATORI: \forall \exists

Consideriamo la seguente proprietà

$$P(x) \leftrightarrow x + 3 > 5$$

- E’ vero o falso che $\forall x \in \mathbb{N}$, vale $P(x)$?
- E’ vero o falso che $\exists x \in \mathbb{N}$, per cui vale $P(x)$?
- Determina un insieme A tale che $A \subseteq \mathbb{N}$ e che $\forall x \in A$ vale $P(x)$
- Determina un insieme B tale che $B \subseteq \mathbb{N}$ e che risulti falso che $\exists x \in B$ per cui vale $P(x)$

■ ...e se $P(x)$ è considerata in R ?.....

■ Quale delle seguenti espressioni significa che “Ogni numero intero è multiplo di 7”? Quale invece significa: “Non è vero che ogni numero intero è multiplo di 7”

1. $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a = 7b$

2. $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a \neq 7b$

3. $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a = 7b$

4. $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a \neq 7b$

5. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a = 7b$

6. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a \neq 7b$

7. $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a = 7b$

8. $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a \neq 7b$

Può risultare difficile la comprensione di frasi comprendenti negazioni e quantificatori.....

Da una Prova d'Accesso a Ingegneria:

- . L'esatta negazione, nel piano, dell'affermazione “esistono rette parallele” è equivalente a:
- (a) tutte le rette sono incidenti;
 - (b) esistono rette non parallele;
 - (c) tutte le rette sono parallele;
 - (d) nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Esiti

Tecn. Ind (821): 36%

Prof. (121): 26%

LS (1078): 44%

- L'esatta negazione della proposizione “tutti i pulcini sono gialli” è equivalente a:
- (a) qualche pulcino non è giallo;
 - (b) esiste un pulcino nero;
 - (c) qualche pulcino è giallo;
 - (d) nessun pulcino è giallo.

Esiti

Tecn. Ind (821): 43%

Prof. (121): 28%

LS (1078): 48%

Molto più facile:

- . Supponiamo si accettino come vere le seguenti premesse: “Tutte le persone sono intelligenti.” e “Alcune persone sono istruite”. Quale delle seguenti conclusioni si deduce come vera da esse ?
- (a) Ogni persona istruita è intelligente;
 - (b) Qualche persona istruita non è intelligente;
 - (c) Ogni persona intelligente è istruita;
 - (d) nessuna delle precedenti possibilità è corretta.

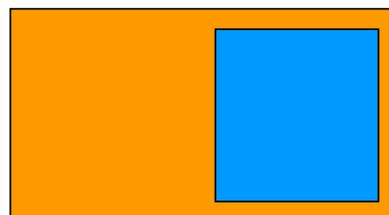
Esiti

Tecn. Ind (821): 82%

Prof. (121): 58%

LS (1078): 88%

Si potrebbe rispondere a questo quesito anche utilizzando una rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn, e utilizzando la definizione di sottoinsieme.



Una domanda:

Quanti sono i sottoinsiemi di in insieme X , *compreso l'insieme vuoto e X stesso?*

X	$P(X)$
\emptyset	$\{\emptyset\}$
$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$
$\{a,b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$\{a,b,c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c,b\}, \{a,b,c\}\}$
.....	

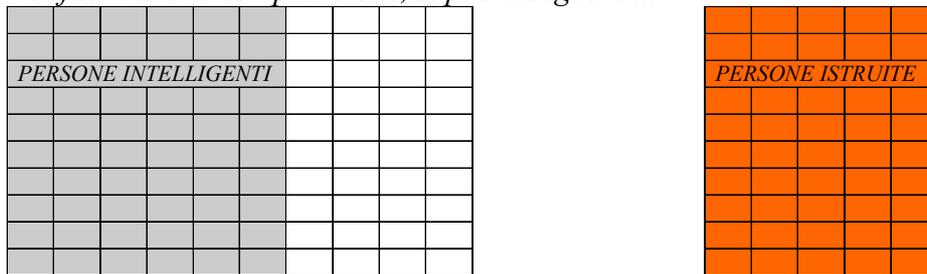
Si può far vedere graficamente che se aggiungo un elemento a un insieme il numero di sottoinsiemi di questo nuovo insieme è il doppio del numero di sottoinsiemi dell'insieme precedente.....

Se X contiene n elementi
 $P(X)$ contiene 2^n elementi

Un'altra situazione:

Supponiamo si accettino come vere le seguenti premesse: “Il 60% delle persone sono intelligenti.“,
 “Il 50% persone sono istruite“.,
 Ci sono persone intelligenti e istruite?
 Ci sono persone né intelligenti né istruite?

Per facilitare la comprensione, si può disegnare...



Spostando la tabella di colore arancio sull'altra, si possono visualizzare le diverse situazioni Possibili.

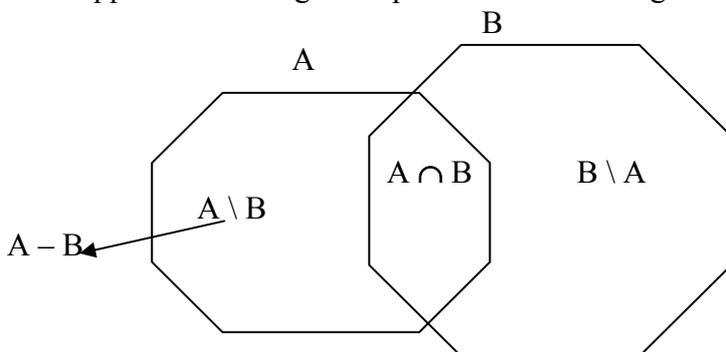
Operazioni fra insiemi

Il quesito appena proposto si può ricondurre alle operazioni fra insiemi.

Nella scuola secondaria superiore si presentano almeno le prime due tra le seguenti operazioni fra insiemi

- Unione** \cup ,
- Intersezione** \cap ,
- Differenza** \setminus

Una rappresentazione grafica per richiamarne il significato:



Insieme Complementare

$A \setminus B$ si dice
complementare di A rispetto a B.

(si scrivew anche A' oppure \bar{A})

Un problema con “unione, intersezione, complementare”

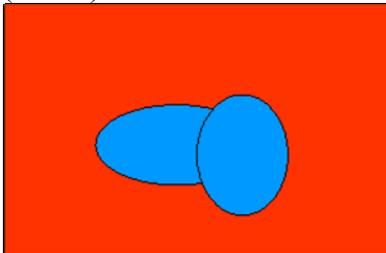
Se due insiemi A e B sono sottoinsiemi di uno stesso insieme Y e se indichiamo con

- $(A \cup B)^C$ il complementare di $A \cup B$ rispetto a Y,
 - A^C il complementare di A rispetto a Y,
 - B^C il complementare di B rispetto a Y, è
- $$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C,$$

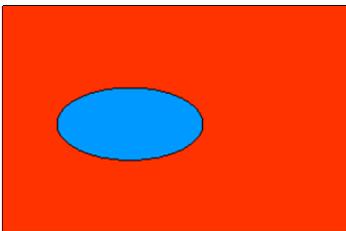
Anche questo problema si risolve più facilmente con una rappresentazione grafica:

(l'insieme Y è rappresentato dal rettangolo con sfondo rosso)

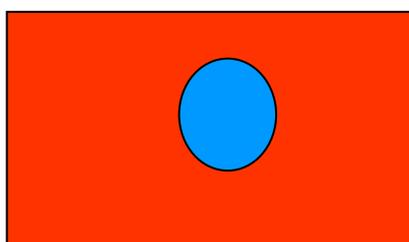
$(A \cup B)^C$



A^C



B^C



Quanti sono i sottoinsiemi di in insieme X, compreso l'insieme vuoto e X stesso?

X	$P(X)$
\emptyset	$\{\emptyset\}$
$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$
$\{a,b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$\{a,b,c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c,b\}, \{a,b,c\}\}$

.....

Se X contiene n elementi

$P(X)$ contiene 2^n elementi

Il prodotto cartesiano e le funzioni

Definizione di coppia ordinata e di prodotto cartesiano

Funzione da un insieme A a un insieme B (pag. 79):

$f: A \rightarrow B$

se è assegnata una corrispondenza che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno e un solo elemento dell'insieme B

Le coppie $(a, f(a))$, con $a \in A$ costituiscono un sottoinsieme di $A \times B$.

Funzioni con proprietà

■ Suriettive

■ Iniettive

■ Biiettive, Corrispondenze biunivoche

(ABI, CAB, N°CC; codice fiscale; n°carta di credito)

Codomio, per noi, è l'insieme al quale appartengono le $f(x)$. Per comodità indicheremo con $f(X)$ l'insieme dei valori assunti dalla funzione (sono detti anche immagini. **Attenzione al termine "valore"**)

Formule algebriche

■ Il volume di una piramide

■ L'area di un quadrato $PQRS$ inscritto in un quadrato $ABCD$ di lato a , il cui vertice P appartiene al segmento AB e dista x dal vertice A .

$$\text{Area} = 2x^2 - 2ax + a^2$$

■ La forza gravitazionale che agisce su una massa m , posta tra due masse m_1 ed m_2 , poste a distanza r , se con r_1 si indica la distanza fra m , m_1 .

■

$$F = G \frac{mm_1}{r_1^2} - G \frac{mm_2}{(r - r_1)^2}$$

I segni e il senso delle formule

■ Energia potenziale gravitazionale di un sistema formato da un corpo di massa m , posto a distanza r da un corpo di massa M :

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

■ Grafico di questa funzione :

Funzioni inverse

- Funzione diretta: $f: X \rightarrow Y$

$$f(x) = y$$

- Funzione inversa $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$

$$x = f^{-1}(y) \leftrightarrow f(x) = y$$

Nella nostra accezione di “codominio” sono invertibili soltanto le funzioni biettive

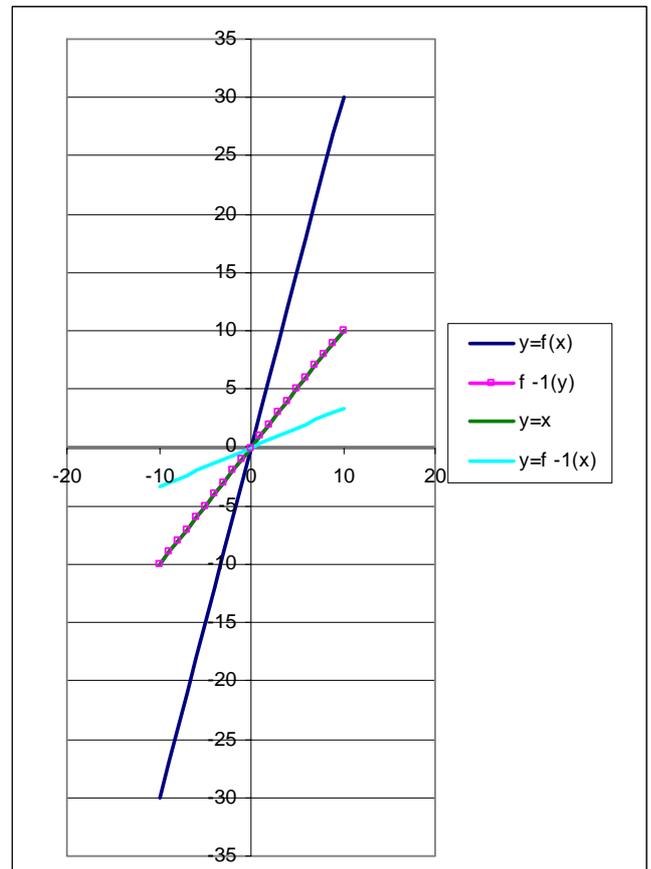
Una rappresentazione grafica:

Alcuni esempi di funzioni e delle corrispondenti inverse

- $y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

- $y = 2^x \rightarrow x = \log_2 y$

- $y = \sin x \rightarrow x = \arcsin y$
 $-\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$



Funzioni composte

$$y = f(g(x))$$

NB: il dominio di $f(g(x))$ è costituito dai soli valori x per i quali $(g(x))$ appartiene al dominio di f .

E' importante che gli studenti capiscano bene il concetto di funzione composta, che è fondamentale, ad esempio, per il calcolo delle derivate di funzioni.

Esempi elementari: $\sin 2x$, $x^3 + 3x$, $\ln 3x^2$,

Funzioni “a tratti”

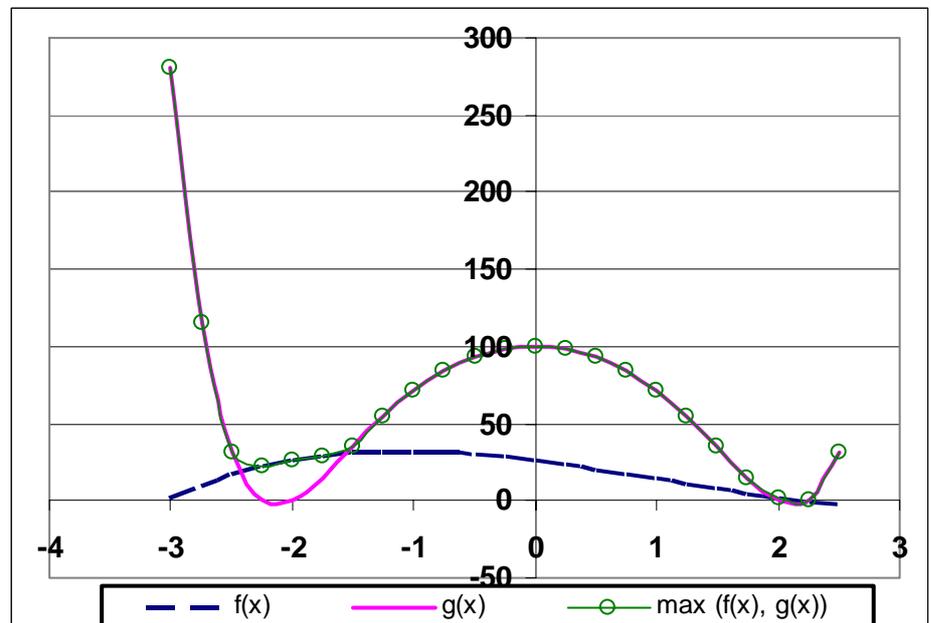
$$y = |x|$$

$$y = [x] \text{ “parte intera di } x\text{”}$$

$$y = \max(f(x), g(x))$$

Una rappresentazione grafica, con Excel, di una funzione del tipo. $y = \max(f(x), g(x))$

La funzione $y = \max(f(x), g(x))$ si sovrappone alternativamente alla prima o alla seconda delle due funzioni.



Osservazioni:

- Questo grafico si riferisce all'intervallo $-2,5 \leq x \leq 3$, volutamente non simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento

Con i ragazzi è bene evidenziare che in prossimità dell'intersezione fra il grafico di $f(x)$ e quello di $g(x)$ il grafico di $\max(f(x), g(x))$ descrive un archetto non sovrapposto ad alcuna delle due curve. Perché?

PS: La parte di lezione relativa alle funzioni e ai loro grafici è tratta da :

Vinicio Villani, *Matematica per discipline bio-mediche*, ed. MacGraw-Hill, cap. 6.

Altri spunti sono stati tratti da libri di testo adottati nella scuola secondaria superiore e da documenti sulla didattica della matematica per “non matematici”.