Scuola Interateneo di Specializzazione per la Formazione
degli Insegnanti della Scuola Secondaria del Veneto
Indirizzo Tecnologico
ANNO ACCADEMICO 2006-2007
DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Alcuni Elementi di Geometria Euclidea

Schemi di lezione di Margherita Motteran

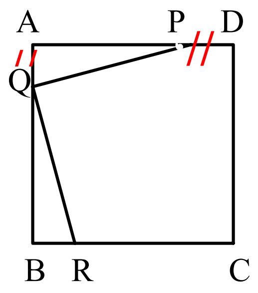
In questo corso si presenteranno soltanto alcuni elementi di geometria del piano e dello spazio, che ogni specializzando potrà integrare, consultando un manuale di geometria per la scuola secondaria di secondo grado.

Alcuni Elementi di Geometria del piano

<u>Alcune note sulla dimostrazione matematica</u>
Proposizioni primitive (in Euclide "nozioni comuni"), comuni a tutte le scienze:
– *principio d'identità,*
– *principio di "non" contraddizione,*
– *principio del terzo escluso*

Postulati di una teoria = proposizioni poste alla base della teoria stessa.
Teorema (di una teoria) = ogni asserzione deducibile logicamente dai postulati.
Le componenti di un teorema: l'ipotesi, la tesi, la dimostrazione

Vero o falso?
Un punto qualunque *P* di un lato di un quadrato *ABCD* è uno dei vertici di un quadrato inscritto in ABCD.



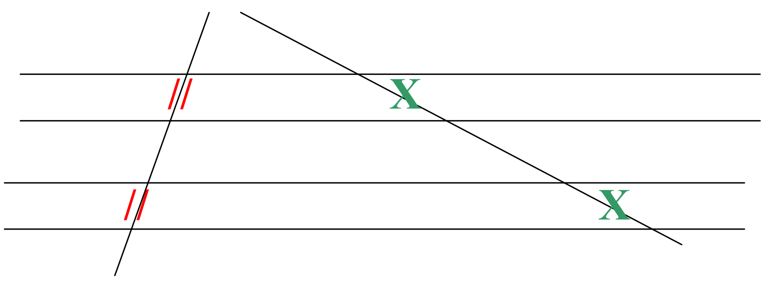
– ipotesi ....
– dimostrazione ....
– tesi ....

Quali sono il quadrato di area massima e quello di area minima?
Teorema ....
Dimostrazione geometrica ....

Costruzione di un parallelogrammo, dati tre punti non allineati:
- coppie di lati paralleli,
- figura con centro di simmetria

<u>Evidenziare il significato dell'enunciato di un teorema</u>
Il significato della prima parte del teorema di Talete:

Teorema di Talete:
Data, tra due rette *a* e *b*, una corrispondenza di Talete, i segmenti di *a* e *b* associati nella corrispondenza posta costituiscono due classi di grandezze proporzionali



Dati una circonferenza e un suo punto, esiste una e una sola retta passante per quel punto e tangente alla circonferenza.
....

Data una circonferenza e un suo punto esterno, esistono due sole rette passanti per quel punto e tangenti alla circonferenza.
.....................(esistenza e costruzione)...... (si potrebbe parlare di due rette coincidenti?)

- Poligoni inscrittibili e circoscrittibili a una circonferenza
- Aree di poligoni

Similitudini

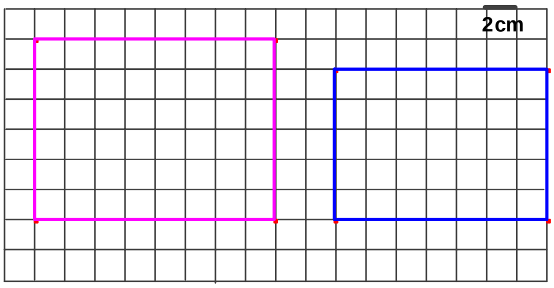
Sul termine “simile”.....

La definizione di “poligoni simili”
I criteri di similitudine dei triangoli

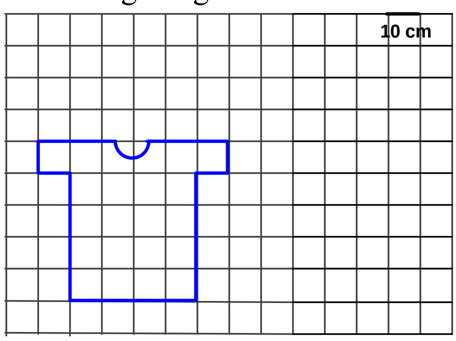
$$\frac{L^1}{L}=k \qquad\qquad \frac{Area^1}{Area}=........$$

- Perché il rapporto tra lato e apotema di un poligono regolare è indipendente dalla misura del lato del poligono?

- Dato un rettangolo *ABCD*, se accorciamo ogni lato di un cm otteniamo un rettangolo simile ad *ABCD* ?



- In una fabbrica si producono magliette di sei taglie. Le magliette di ogni taglia sono in scala con le (simili alle) magliette della taglia precedente ma sono più larghe di 2 cm. Le magliette più piccole sono larghe 40 cm e sono lunghe 50 cm.



Tutte le magliette sono tessute con lo stesso filo e il costo di una maglietta aumenta all’aumentare del peso del cotone necessario per tesserla.
Le magliette della prima taglia sono vendute a 5 euro l’una. Il fabbricante decide di vendere a un prezzo più alto le magliette il cui peso supera di almeno il 20% il peso di quelle della prima taglia..
A che taglia scatta l’aumento di prezzo?........................

- Un trapezio rettangolo può essere inscritto in una circonferenza? Perché?

- Qual è il rapporto fra l’apotema di un esagono regolare e quella di un ottagono regolare?

....

- Un esagono regolare *ABCDEF* è inscritto in un rettangolo *HKLM*, tale che i lati *HK* ed *LM* contengano, rispettivamente, i lati *BC* e *EF* dell'esagono e il lato *KL* contenga il vertice *D* dell'esagono.
  - o Il rettangolo *HKLM* potrebbe essere un quadrato? Perché?
  - o Supponendo che la figura descritta rappresenti una piastrella bicolore, blu nella parte esagonale, bianca nella parte rimanente, qual è il rapporto fra l'area della parte blu e quella della parte bianca? Perché?
  - o Qualora si utilizzassero piastrelle di questo tipo per pavimentare una stanza, quali figure geometriche si potrebbero formare? Perché?
  - o Supponendo che il lato maggiore del rettangolo misuri 20 cm, si scriva la misura del lato minore, con tre cifre significative.

- Un punto *C* di una circonferenza, di centro *O* e raggio *r*, è il vertice di un angolo alla circonferenza che misura 45°. Siano *A* e *B* i punti in cui i lati dell'angolo intersecano la circonferenza e sia *D* il punto in cui la bisettrice dell'angolo interseca la circonferenza. Si scriva una formula che permetta di calcolare l'area del quadrilatero *AOBD*, al variare di *r*.

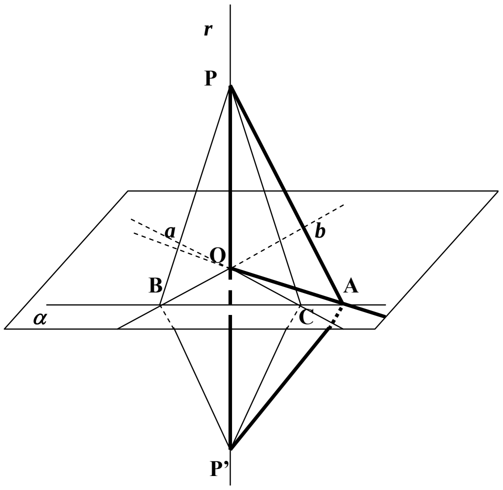
- Un punto *C* di una circonferenza di centro *O*, il cui raggio misura 10 cm, è il vertice di un angolo alla circonferenza di misura α. Siano *A* e *B* i punti in cui i lati dell'angolo intersecano la circonferenza e sia *D* il punto in cui la bisettrice dell'angolo *ACB* interseca la circonferenza.
  - o Si scriva una formula che per calcolare l'area del quadrilatero *AOBD*, al variare di α.
  - o Si determini il valore di α. Al quale corrisponde il quadrilatero di area massima e si calcoli l'area di tale quadrilatero.

Alcuni Elementi di Geometria dello spazio

In questa lezione si presenteranno soltanto alcuni elementi di geometria dello spazio, che ogni specializzando potrà integrare, se lo riterrà opportuno, consultando un manuale di geometria per la scuola secondaria di secondo grado.

<u>Fascio di rette:</u> in un piano, fissato un punto *P*, il *fascio di rette di centro P* è l'insieme di tutte e sole le rette del piano che passano per il punto *P*.

<u>Fascio di piani:</u> insieme dei piani passanti per una stessa retta.



<u>Stella di rette:</u> insieme delle rette (dello spazio) passanti per uno stesso punto.

Individuazione di un piano in particolare relazione con una assegnata retta *r*.

ipotesi: $O \in a$, $O \in b$, $a,b \perp r$,

Le rette a e *b* individuano un piano α.. Sia *t* una retta e sia $t \subset \alpha$, $t \cap r = \{O\}$

$$\mathbf{OP \equiv OP'} \Rightarrow \begin{cases} AP \equiv AP' \\ BP \equiv BP' \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}P \equiv A\overset{\Delta}{B}P'$$

$$\Rightarrow P\hat{B}A \equiv P'\hat{B}A \text{ (angoli)}$$

Qualsiasi retta del piano passante per O, tranne la retta parallela alla retta *AB*, interseca la retta AB in un punto che denotiamo C

$B\overset{\Delta}{P}C \equiv B\overset{\Delta}{P'}C$ **(triangoli)** $\Rightarrow PC \equiv P'C \quad \Rightarrow OC \perp r \quad \Rightarrow$ tutte le rette del piano α passanti per il punto O sono perpendicolari ad r.

Viceversa....

Se per O passasse una retta $t \notin \alpha$ e $t \perp r$.......

Pertanto, le rette passanti per il punto O e appartenenti al piano α sono tutte e sole le rette passanti per il punto O e perpendicolari ad r.

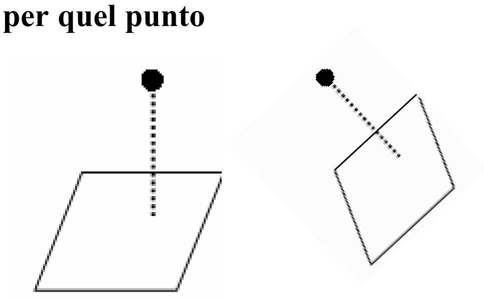
$\Rightarrow$ α piano passante per il punto O e perpendicolare ad *r*.

In classe:

"Proiettiamo il punto *P* sul piano α ...."

Si dimostra che:

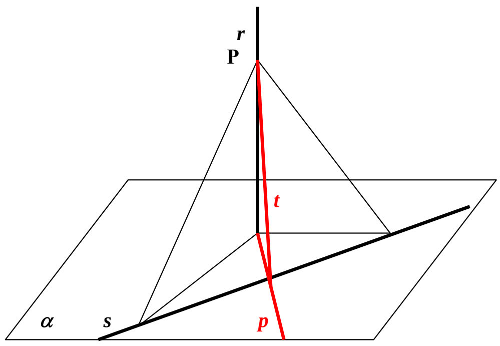
Dato un punto e un piano esiste una e una sola retta che passa per quel punto ed è perpendicolare al piano.



Proiezione di un punto su un piano

Distanza di un punto da un piano

Teorema delle "tre perpendicolari"



Se $r \perp \alpha$; $p \perp s$

$\Rightarrow s \perp$ *piano* (*t*, *p*)

..

Postulato: **Un piano divide lo spazio in due parti, entrambe convesse.**

Diedro convesso: **intersezione di due semispazi S_X ed S_y le cui origini α e β non sono parallele.**

Sezioni normali di un diedro

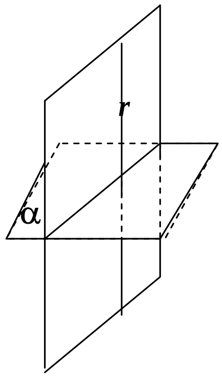
Piani perpendicolari

In classe:

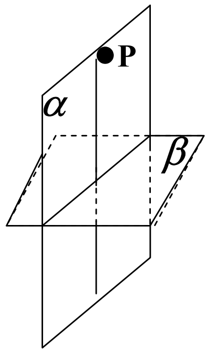
"Proiettiamo la retta *r* sul piano α ………………"

Cosa si ottiene? Perché?

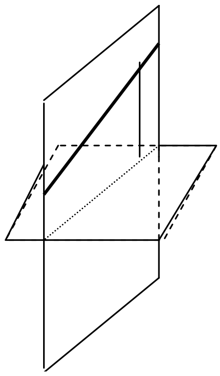
1) Se una retta è perpendicolare a un piano ogni piano passante per essa è perpendicolare a quel piano



2) Se due piani α e β sono tra loro perpendicolari e un punto *P* appartiene ad α, la retta passante per *P* e perpendicolare a β appartiene ad α.



3) Dati un piano α e una retta *r* ad esso non perpendicolare, esiste uno e un solo piano passante per la retta *r* e perpendicolare al piano dato



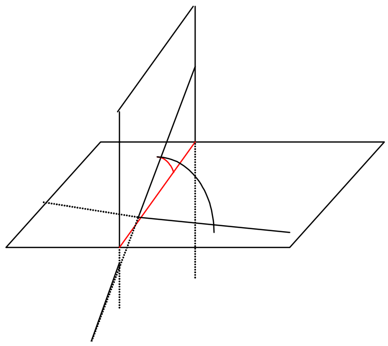
⇒ preso un punto qualunque della retta *r*, la retta passante per quel punto e perpendicolare al piano α …..

⇒ le proiezioni sul piano α dei punti della retta….

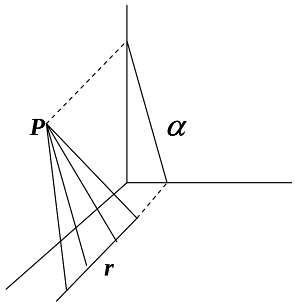
Definizione della proiezione di una retta su un piano

Definizione: ***Dati una retta e un piano non perpendicolari, dicesi proiezione della retta sul piano l'intersezione del piano dato con quello passante per la retta e perpendicolare ad esso.***

Teorema: ***Una retta incidente e non perpendicolare ad un piano forma con le diverse rette del piano, passanti per il suo punti d'intersezione con il piano, un angolo variabile di cui è minimo quello che essa forma con la propria proiezione (ortogonale) sul piano.***



Definizione: ***Se una retta non è perpendicolare ad un piano, dicesi <u>angolo della retta con il piano</u> l'angolo che essa forma con la propria proiezione (ortogonale)sul piano.***
NB: Se r $\perp$ α **allora tutti i segmenti aventi un estremo in P e l'altro su *r* hanno la stessa proiezione su** α**.**



Per parlare di POLIEDRI cominciamo da

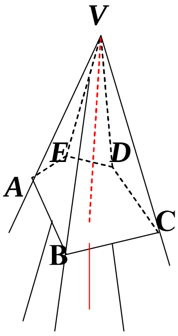
<u>Prismi indefiniti:</u> **Dati un poligono e una retta *r* incidente il suo piano, si dice PRISMA INDEFINITO l'insieme di tutte le rette parallele ad *r* e passanti per i punti del poligono**

<u>Prisma finito:</u> **Si dice PRISMA (FINITO) la parte di prisma indefinito compresa fra due sezioni parallele**

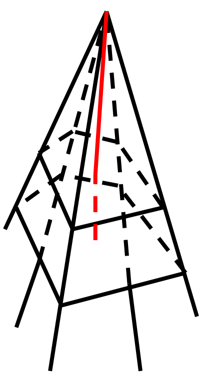
<u>Parallelepipedo</u>
Teorema: **Le quattro diagonali di un parallelepipedo passano per un medesimo punto che è punto medio di ciascuna.**

Per parlare di PIRAMIDI...

<u>Angoloide</u>: **dato un poligono (convesso) e un punto *V* fuori del suo piano, si dice <u>angoloide</u> la figura generata da tutte le semirette di origine *V* passanti per i punti del poligono.**



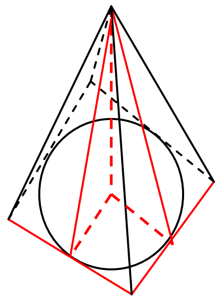
<u>Teorema</u>
Se due piani paralleli, segano tutti gli spigoli di un angoloide,
i poligoni, che così si ottengono come sezioni dell'angoloide, sono simili e il loro rapporto di
similitudine è uguale al rapporto delle distanze dei rispettivi piani dal vertice



Piramide: **presi un qualsiasi poligono *A, B, C, ...K* e un punto V fuori del *suo* piano, la parte dell'angoloide *V A, B, C, ...K,* che, rispetto al piano del poligono, giace nel semispazio in cui cade *V*, si dice *piramide di vertice V* e *di base A, B, C, ...K.***

Piramide retta:

Una piramide si dice *retta* se il suo poligono di base è circoscrittibile a una circonferenza il cui centro è il piede dell'altezza.



Teorema:

Le altezze delle facce laterali di una piramide retta sono congruenti.

Attenzione!

Una percentuale non trascurabile di studenti esce dalla scuola secondaria di secondo grado con la convinzione che questa proprietà sia goduta soltanto dalle piramidi regolari (di esse, solo il tetraedro regolare è un poliedro regolare).

- **Volume dei poliedri**
- **Similitudine fra poliedri**
- **Solidi di rotazione,Volume dei solidi di rotazione**
- ***Sezioni originate dall'intersezione fra un piano e un cono indefinito a due falde***

Qualche problema.

1) Cosa si ottiene intersecando una sfera con un piano? E intersecando due sfere?

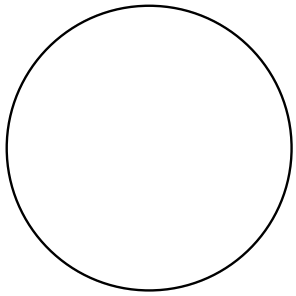
2) Si consideri l'intersezione fra una sfera e un piano. A quale distanza da centro deve essere collocato il piano affinché sia massimo il volume del cono avente come base l'intersezione fra il piano e la sfera e come vertice il centro della sfera? Qual è il rapporto tra il volume di questo cono e il volume della sfera?

3) Calcolare il volume del tetraedro regolare di spigolo l.

4) Individuare la posizione del punto P sull'altezza di un cono in modo che il piano passante per P e parallelo alla base del cono divida il cono in due solidi di uguale volume.

Da una prova scritta......

"Un fermacarte è costituito da una sfera di vetro trasparente, il cui diametro misura 10 cm, nella quale è inscritto un doppio cono, formato da due coni aventi in comune la base. Il rapporto tra le altezze dei due coni è 4.



a) Si rappresenti la figura, si calcolino il volume della sfera e quello del doppio cono in essa inscritto e la percentuale del volume della sfera occupato dal doppio cono.

b) Supponendo di considerare variabili le altezze dei due coni,

b1.si determinino i valori delle altezze dei due coni per le quali il volume del doppio cono è massimo;

b2.dopo aver detto e giustificato con considerazioni di carattere geometrico, quali figure si ottengono proiettando il doppio cono su un piano parallelo e su uno perpendicolare alle altezze dei due coni, si scrivano le formule che permettono di calcolare l'area di tali figure al variare dell'altezza di ciascuno dei due coni.

Dopo aver risolto il problema, si indichino

- le conoscenze necessarie per risolverlo;
- <u>duei punti critici e come si potrebbe aiutare un ragazzo a superarli.</u>