Scuola Interateneo di Specializzazione per la Formazione degli Insegnanti della Scuola Secondaria del Veneto
ANNO ACCADEMICO 2006-2007
INDIRIZZO SCIENTIFICO TECNOLOGICO

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Schema di lezione
Docente Margherita Motteran
Maggio 2007

Limite di una funzione in un punto (*Fare riferimento al testo consigliato, da pag 117; queste pagine sono un promemoria della lezione.*)

1. A sia un sottinsieme di *R* e "*a*" un punto di accumulazione di A e sia *f :A*→ *R*,; diremo che

$$\lim_{x-->a} f(x) = l$$

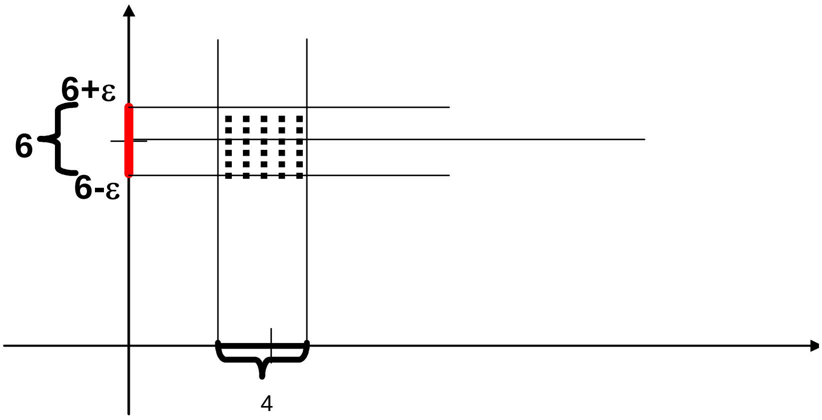
se, comunque si fissi ε > 0, esiste un intorno *K* del punto "*a*" tale che per ogni x appartenente a tale intorno (escluso al più *a*)

$$| f(x) - l| < \varepsilon$$

Si può dire che

$$\lim_{x->4}(x+1) = 6$$ **???**

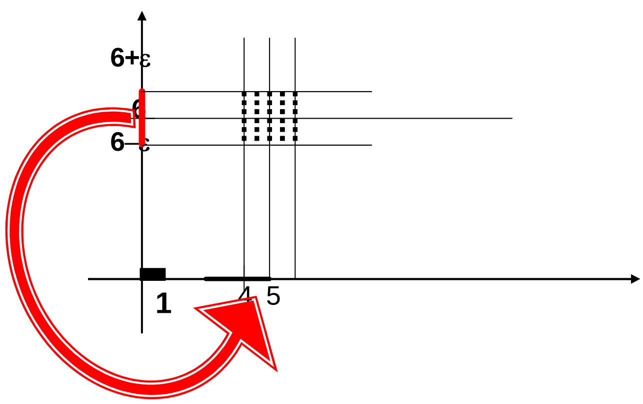
$$|(x+1)-6| < \varepsilon$$



Risolvendo la disequazione, si trova che è soddisfatta se

$$5 - \varepsilon < x < 5 + \varepsilon$$

→ ad ogni scelta di valore di ε corrisponde la definizione di un conseguente intorno di *5*



Nel nostro esempio, se ε < 1 , gli intervalli aperti (5 - ε, 5 + ε) non contengono il punto 4 e quindi non sono neppure intorni del punto 4.

2a4. Limite destro di una funzione *f(x)*

Si cerca quando *x* si avvicina a un estremo sinistro dell'insieme di definizione.

$a \quad \leftarrow x$

***x* si avvicina ad *a* "da destra" e perciò si dice che si intende determinare il *limite destro* di *f(x)* al tendere di *x* ad *a*.**

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Esempio:

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

$$\left| \sqrt{x-1} \right| < \varepsilon \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{x-1} < \varepsilon$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < \varepsilon^2 \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono comprese nell'intervallo → **$1 \leq x < 1 + \varepsilon^2$**

Si può procedere in modo analogo per presentare il limite sinistro di una funzione….

2a5. Intervalli illimitati

Nel caso di intervalli illimitati, si parla di estremi "all'infinito"
Un estremo "all'infinito" non appartiene all'intervallo di pertinenza, perché " -∞" e +"∞" non sono valori numerici.

Si può affermare che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+1}{x} \right) = 5$$

se è possibile individuare un numero reale (positivo) M tale che per ogni x ∈ D e tale che x > M

sia $\left| \frac{5x+1}{x} - 5 \right| < \varepsilon$

La disequazione del nostro esempio è soddisfatta se x > 1/ε

2a6. Casi possibili

Per ciascuno de tipi di limiti considerati limiti (destro, sinistro, al finito o all'infinito), possono verificarsi tre casi:

I. Il limite esiste finito;
II. Il limite esiste ed è $+\infty$ oppure $-\infty$;
III. Il limite non esiste.

Un esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x^2} > M$$

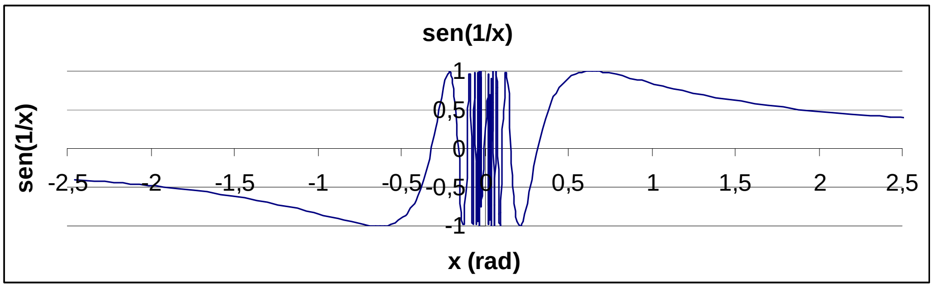
$$\to x^2 < \frac{1}{M} \to \quad -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Unicità del limite:

Si dimostra che
Se una funzione *f(x)*, definita in D, ammette limite per *x* tendente ad *a*, questo limite è unico.

➤ **Ci sono casi in cui $\lim_{x-->a} f(x)$ non esiste**

$$\lim_{x-->0} sen\frac{1}{x}$$



2a7. Calcoli "semplificati"
Il calcolo del limite di una funzione in un punto
può richiedere calcoli complessi ; qualche volta può risultare conveniente riflettere sul procedimento più opportuno.

x-1 >o

$$\lim_{x-->1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim_{x-->1^+}\left(\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}\right) = \lim_{x-->1^+}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right) = 0$$

2a8. Limiti particolari

Si potrebbe dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$ **se *x* è misurato in radianti;**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - senx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{1 - sen}{1 - sen^2 x}$$

Esempio di calcolo"qualitativo"

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\ln(4 - x^2)} = 0$$

$4-x^2$ → 0+ → ln($4-x^2$) → - ∞ →…….

Invece:

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{1}{\ln(4 - x^2)} = -\infty$$

2a9. Un problema tratto dalla realtà

Un corpo, inizialmente a temperatura T_1, posto in un ambiente più caldo, a temperatura $T_a > T_1$, si riscalda al passare del tempo secondo una legge del tipo:

$$T(t) = T_a - (T_a - T_1)\, e^{-ht}$$

Si può dimostrare che $$\lim_{t \to +\infty} T(t) = T_a$$

Approssimazione

Se il termometro usato non permette di rilevare una differenza $\Delta T < \varepsilon$, quando *t* è *tale che* $|T(t) - T_a| < \varepsilon$, la temperatura del corpo appare uguale a T_a

2. Continuità

Una funzione *y = f(x)* si dice continua in un punto *a*, appartenente al suo insieme di definizione D se

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Funzione si dice continua su D se essa è continua in ogni punto di D.

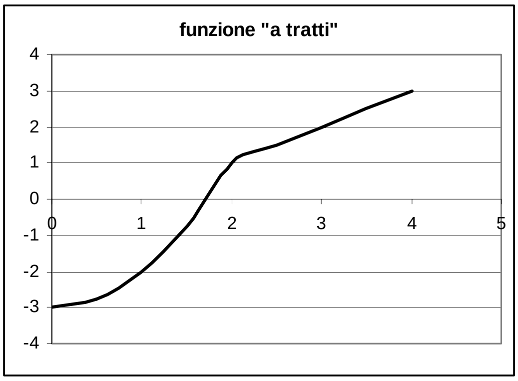
Intuitivamente, se una funzione definita in un unico intervallo è continua di può pensare di disegnare il suo grafico senza staccare la penna dal foglio….

Punti di discontinuità (<u> intuitivamente, </u>dove la funzione presenta dei "salti")

Un elenco di funzioni continue: funzioni polinomiali, funzione seno e funzione coseno, funzioni esponenziali e logaritmiche (attenzione al dominio); funzioni composte e funzioni inverse di funzioni continue; <u>con alcune precisazioni sui punti di raccordo, le funzioni a tratti</u>

Esempio:

F(x): $x \rightarrow x^2 - 3$ **se** $0 \le x \le 2$;
$x \rightarrow x - 1$ **se** $2 > x \le 4$;



Esempio:

Fornire un esempio di funzione *f(x)* definita e continua su tutto l'asse reale, tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad \textbf{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$$

Una soluzione possibile : y = $\dfrac{1}{e^x + 1} + \dfrac{5}{e^{-x} + 1}$