FONDAMENTI STORICO-EPISTEMOLGICI DELLA MATEMATICA 1

Prof. Carlo Minnaja
minnaja@math.unipd.it
http://www.math.unipd.it/~minnaja

Trigonometria

Trigonometria

Å La trigonometria ha lo scopo di determinare i valori di alcuni elementi dei triangoli essendo noti altri elementi; quella piana tratta dei triangoli piani, quella sferica tratta dei triangoli sferici.

Å La *trigonometria* è nata per risolvere problemi di astronomia e di agrimensura.

Trigonometria

Å La parola ***trigonometria*** compare per la prima volta nel libro *Sphaericorum libri tres* (Heidelberg 1595) di Bartholomeus Pitiscus

Trigonometria

Å **Aristarco di Samo** (III sec. a. C.) aveva notato che il rapporto tra lôarco e la corda decresce al decrescere dellôangolo da retto a nullo

Trigonometria

Å **Aristarco** era un grande astronomo:

Å scoprì la precessione degli equinozi

Å determinò lôangolo dellôeclittica

Å misurò le irregolarità del moto della Luna

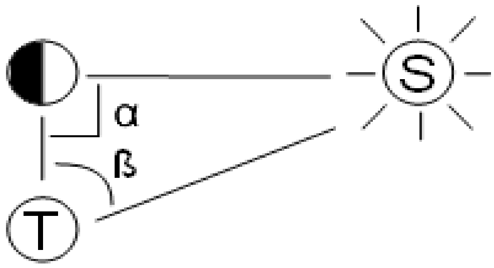
Å elaborò un catalogo di oltre 1000 stelle

Trigonometria

Å Aristarco da Samo fu il primo a proporre una teoria eliocentrica

Å calcolò il rapporto tra le distanze dalla Terra del Sole e della Luna con un ragionamento geometrico

Trigonometria



La luna è in quadratura

Trigonometria

Å Quando la Luna è in quadratura osservando б si può calcolarne la tangente, che appunto è il rapporto tra le due distanze

Å In realtà Aristarco trovò questo rapporto stimandolo tra 18 e 20, mentre è 400

Trigonometria

Å Ma la precisione con cui Aristarco poteva calcolare lôangolo era scarsa e ciò ha portato ad una valutazione estremamente imprecisa

Å del pari era scarsa la precisione temporale con cui poteva determinare lôora esatta della quadratura

Trigonometria

Å La trigonometria compare con una **tabella di valori dellôarco e della corda** per una serie di angoli al centro di una circonferenza

Trigonometria

Å **Ipparco di Nicea** (190-120 a. C) è forse il primo che divide la circonferenza in 360°

Trigonometria

- Ipparco visse a lungo a Rodi (dove probabilmente morì), fece un catalogo di 1080 stelle, con latitudine e longitudine sulla sfera celeste, e suddivise gli astri in classi di luminosità, classificazione che è usata ancora oggi, dopo una leggera modifica nell'Ottocento
- Fu probabilmente il primo che calcolò le eclissi solari dei successivi 600 anni

Trigonometria

- Confermò la precessione degli equinozi scoperta da Aristarco
- Calcolò la lunghezza dell'anno in 365 gg., 6 h., 55', 12''

Trigonometria

- Ipparco scrisse probabilmente 14 libri, dei quali quasi nulla è giunto fino a noi
- Parlano di lui l'Almagesto di Tolomeo, Teone nei commenti dell'Almagesto
- Una pagina intera gli è dedicata da Leopardi nella sua *Storia dell'astronomia*

Trigonometria

- **Menelao di Alessandria** (I sec. d. C.) ci fornisce i primi sviluppi della trigonometria sferica.
- Le sue opere sono perdute, ma è rimasta una traduzione araba di *Sphaerica*, in tre libri.
- Per la prima volta compare il concetto di triangolo sferico come zona limitata da tre archi di cerchio massimo

Trigonometria

- **Tolomeo d'Alessandria** (m. 168 d. C.)
- *Sintassi matematica* (in arabo: *Almagesto*):
- 13 libri che mescolano trigonometria e astronomia
- Tolomeo divide la circonferenza in 360°
- Tolomeo calcola quindi per ogni arco di un certo numero di parti la corrispondente *corda* (inizia con gli archi di 36° e 72°)

Trigonometria

- Tolomeo non usava tuttavia le funzioni *seno*, *coseno*, ma faceva ricorso alle **corde** degli archi (e quindi dell'arco doppio)
- Tuttavia basta sostituire nell'Almagesto al posto della corda dell'arco x la quantità

$$2\, sen\, (x/2)$$

Trigonometria

Å Nellô Almagesto si trovano varie formule in uso ancora adesso

Å *sin²x + cos²x = 1*

Å *sen* (Ŭ+ɓ) = *sen* Ŭ *cos* ɓ + *sen* ɓ *cos* Ŭ

Å *cos* (Ŭ+ɓ) = *cos* Ŭ *cos* ɓ - *sen* Ŭ *sen* ɓ

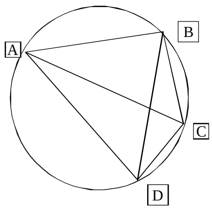
Å Tali formule sono un caso particolare del teorema seguente:

Trigonometria

Å Sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio; allora

$AB \times CD + BC \times DA =$

$= AC \times BD$



Trigonometria

Å cioè la somma dei prodotti di lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali

Å Se AC fosse un diametro si otterrebbero le formule che compaiono nellô Almagesto

Euclide

Euclide

Euclide

Euclide

- Pochissimo si sa della sua vita: nacque ad Alessandria, visse probabilmente sotto Tolomeo I (367 a. C. - 283 a. C.)
- è menzionato in un brano di Pappo
- di lui si sa quanto ne dice Proclo, che lo colloca tra i discepoli di Platone, più anziano di Archimede e di Eratostene, che erano coetanei

Euclide

- Fu spesso confuso con Euclide di Megara; anche alcune edizioni medievali latine di sue opere portano *Euclides Megarensis* e lo qualificano come filosofo (effettivamente Euclide di Megara fu un filosofo, che visse un secolo prima, fondatore della scuola megarica e discepolo di Socrate). Solo con gli studi di Commandino (1572) fu corretta questa erronea supposizione.

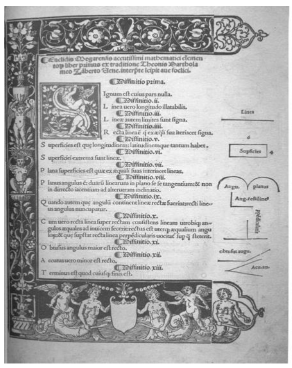
Euclide

- Fu lôautore degli ***Elementi***, che non ci sono giunti in originale, se non pochi frammenti, ma attraverso una traduzione araba poi tradotta in latino
- fu autore anche di altre opere: *Ottica*, *Coniche*, *Porismi* (corollari o teoremi incompleti, riassunti da Pappo), *Fenomeni* (della sfera celeste), due trattati di musica

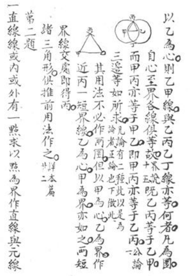
Euclide - Elementi

Euclide - Elementi

Euclide - Elementi



Euclide - Elementi



La prima proposizione del Libro I degli *Elementi*
(trad. gesuita Matteo Ricci, sec. XVII)

Euclide - Elementi

Å Gli *Elementi* (ca. 300 a. C.) comprendono 13 libri (6 dedicati alla geometria piana, 2 alla teoria dei numeri, 1 alle grandezze incommensurabili, 2 alla geometria solida)

Å hanno contributi originali, ma anche sono una sintesi di circa tre secoli di ricerche geometriche

Euclide - Elementi

Å Il primo libro riporta 23 termini, che descrivono dei concetti primitivi, ad es.:

Å Un **punto** è ciò che non ha parti

Å **Linea** è lunghezza senza larghezza

Å Estremi di una linea sono punti

Å **Linea retta** è quella che giace egualmente rispetto ai suoi punti

Å **Superficie** è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza

Å Estremi di una superficie sono linee

Euclide - Elementi

Å Altre definizioni riguardano:

Å *perpendicolare*,

Å *angoli (retto, acuto, ottuso),*

Å *figure*,

Å *triangoli*, *quadrilateri (quadrato, rombo, romboide, trapezio),*

Å *rette parallele* (che, prolungate da entrambe le parti, non si incontrano)

Euclide - Elementi

Å Ecco alcune delle proprietà dei numeri (naturali):

Å **Numero** è una pluralità composta di unità

Å un numero (minore) è *parte* di un altro (maggiore) quando *lo misura* (cioè quando è un suo sottomultiplo)

Euclide - Elementi

Å Numero **pari** è quello che è divisibile in due parti uguali

Å Numero **dispari** è quello che non è divisibile in due parti uguali, ossia quello che differisce di unÕunità da un numero pari

Euclide - Elementi

- Numero ***primo*** è quello che è misurato soltanto dall’unità (attualmente esistono altre definizioni che possono essere più comode)
- Numeri ***primi tra loro*** sono quelli che sono misurati soltanto dall’unità come misura comune
- numero ***composto*** è quello che è misurato da qualche numero
- numeri ***composti tra loro*** sono quelli che hanno un qualche numero come misura comune

Euclide - Elementi

- Un primo numero *moltiplica* un secondo quando si ottiene un terzo numero componendolo con la somma di tante volte il secondo per quante sono le unità del primo (è la definizione di *prodotto*)

Euclide - Elementi

- Quando due numeri, moltiplicandosi tra loro, producono un terzo numero, il prodotto si chiama ***numero piano*** e i numeri che si moltiplicano tra loro si chiamano suoi ***lati***
- Quando tre numeri, moltiplicandosi tra loro, producono un quarto numero, il prodotto si chiama ***numero solido*** e i numeri che si moltiplicano tra loro si chiamano suoi ***lati***

Euclide - Elementi

- Numero ***quadrato*** è un numero piano che ha per lati due numeri uguali
- Numero ***cubo*** è un numero solido che ha per lati tre numeri uguali

Euclide - Elementi

- Quattro numeri sono ***in proporzione*** quando, se il primo è multiplo, sottomultiplo o una frazione qualsiasi del secondo, allora il terzo è lo stesso multiplo, lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del quarto

- Numeri piani e solidi tra loro sono quelli che hanno i lati proporzionali

Euclide, *Elementi*, libro VII

Euclide - Elementi

- I **numeri primi** sono infiniti
- Se fossero finiti, e il più grande si chiamasse p_k, allora consideriamo il numero

$$N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k + 1$$

Questo non sarebbe divisibile per nessun p_i (la divisione avrebbe resto 1), e quindi sarebbe primo a sua volta e maggiore di p_k

(dim. adattata modernamente di quella di Euclide, *Elementi*, libro IX; ne esistono altre)

Euclide - Elementi

Å **Assiomi di Euclide**:

Å 1. Tra due punti si può sempre tracciare una retta (che intendeva: *segmento*)

Å 2. Una retta (segmento) si può sempre prolungare

Å 3. È sempre possibile tracciare una circonferenza di qualsiasi centro e qualsiasi raggio

Å 4. Tutti gli angoli retti sono tra loro congruenti

Å 5. Data una retta e un punto fuori di essa esiste un'unica retta passante per tale punto e parallela alla prima

Euclide - Elementi

Å **Nozioni comuni**:

Å cose che sono uguali ad un'altra sono uguali tra loro

Å cose uguali addizionate (o sottratte) a cose uguali danno risultati uguali

Å doppi (e metà) di cose uguali sono uguali

Å il tutto è maggiore della parte

Euclide - Elementi

Å Negli *Elementi* Euclide enuncia e dimostra 465 proposizioni, oltre a lemmi e corollari

Å Teor.: *Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato e simili tra loro*

Euclide - Elementi

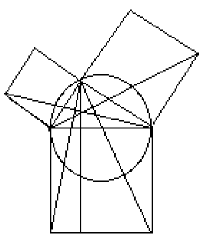
Å **Primo teorema** di Euclide

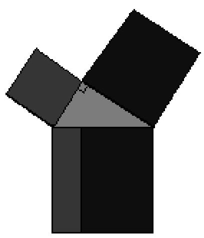
Å *In un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa*

Å oppure

Å *in un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per lati la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa*

Euclide - Elementi



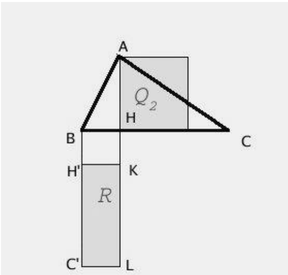


Euclide - Elementi

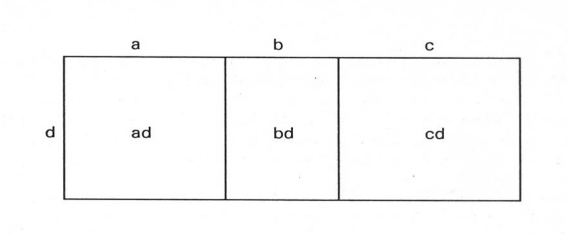
Å **Secondo teorema** di Euclide

Å *Il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa*.

Euclide - Elementi

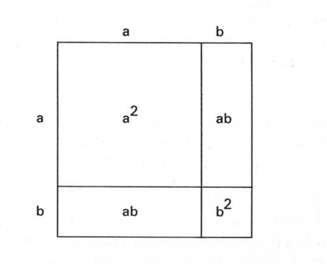


Euclide - Elementi



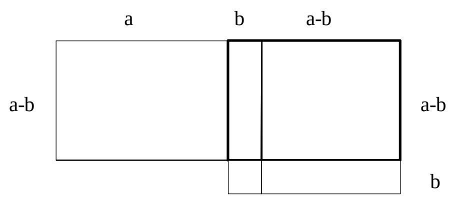
Proprietà distributiva: $(a+b+c)d = ad+bd+cd$

Euclide - Elementi



$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

Euclide - Elementi



$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Euclide - Elementi

- Altre proprietà dimostrate negli *Elementi*:
- l'algoritmo di scomposizione unica di un numero intero in fattori primi
- un altro metodo per trovare il massimo comune divisore tra due numeri *senza ricorrere* alla scomposizione i fattori primi
- i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri (dimostrato col metodo di esaustione: dei due rapporti nessuno può essere maggiore dell'altro)

Euclide - Elementi

- Tra i postulati della geometria c'è il famoso **V postulato** che viene da Euclide enunciato così:
- *se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti*

Euclide - Elementi

- I **numeri primi** sono infiniti
- Se fossero finiti, e il più grande si chiamasse p_k, allora consideriamo il numero

$N = p_1p_2p_3$***é é*** $p_k + 1$

Questo non sarebbe divisibile per nessun p_i (la divisione avrebbe resto 1), e quindi sarebbe primo a sua volta e maggiore di p_k

(dim. adattata modernamente da quella di Euclide, *Elementi*, libro IX; ne esistono altre)

Numeri primi

- ci sono molti studi sulla distribuzione dei numeri primi:
- ad es. Gauss dimostrò che il numero di primi minori o uguali di un dato numero *x* (indicato con ´ (x)) è approssimativamente

x/ln x

Esistono anche approssimazioni migliori

Numeri primi

- Il *postulato di Bertrand* (che fu poi dimostrato da Chebyshev) dice che tra un numero naturale *n* e 2*n* esiste sempre almeno un numero primo

Euclide - Ottica

- Euclide scrisse anche altre opere; nellô**Ottica** enuncia alcuni principi fisici:
- i raggi sono rettilinei
- gli oggetti che si vedono sotto angoli uguali sono ritenuti uguali
- Questôopera ebbe molta influenza sulla scienza medioevale

Democrito

Democrito

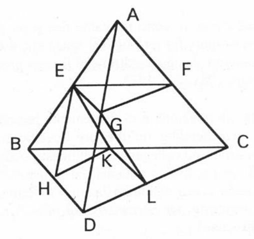
- **Democrito** dimostrò (cosa nota agli egizi quattordici secoli prima) che il volume di una piramide è uguale a 1/3 di quello di un prisma di uguale base e uguale altezza
- probabilmente egli arrivò alla dimostrazione utilizzando un procedimento di limite o di somma di una serie

Democrito

Å Consideriamo una piramide a base triangolare, con vertici della base B, C, D e vertice A, e il prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Å Sia P il volume del prisma

Democrito



Democrito

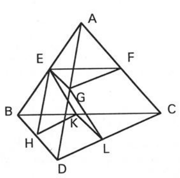
Å Chiamiamo ora E, F, G, H, K, L i punti medi dei rispettivi spigoli, consideriamo i due prismi di vertici rispettivamente KLCEGF e DLGHKE (il cui volume è un quarto del volume P del prisma che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide) e i due tetraedri EGFA e EHKB

Democrito

Å Scomponiamo ciascuno di questi tetraedri ancora con lo stesso sistema, cioè a loro volta in due prismi e in due tetraedri, e procediamo allÕinfinito sui singoli tetraedri che ogni volta rimangono oltre ai due prismi; otteniamo quanto segue

Democrito

$$V = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4^2}P + \frac{1}{4^3}P + \ldots = P \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)$$



Per provare la tesi, ovvero che $V = \frac{1}{3} \cdot P$ sarebbe ora necessario affermare (in termini moderni) che:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$$

Democrito

Å Non è certo che Democrito abbia effettuato una dimostrazione rigorosa di questo fatto, cioè che conoscesse la convergenza di una serie geometrica; è invece probabile che egli abbia dimostrato quella uguaglianza tramite il metodo di esaustione

Democrito

Proposizione. $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$.

□ *Dimostrazione.*

- Constatiamo innanzitutto che è impossibile che sia: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} > \frac{1}{3}$.

Per il lemma precedente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} > \frac{1}{3} \Rightarrow 4^n - 1 > 4^n$$

e ciò è assurdo.

- Dimostriamo quindi (con il metodo di esaustione) che è impossibile che

sia: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} < \frac{1}{3}$. Se infatti così fosse, consideriamo $A < \frac{1}{3}$ tale che: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = A$.

Sottraiamo progressivamente a $\frac{1}{3}$ i termini della serie geometrica:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots;$$

Otteniamo:

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ dove $\frac{1}{4}$ è maggiore di $\frac{1}{3}:2$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$ dove $\frac{1}{16}$ è maggiore di $\frac{1}{12}:2$

$\frac{1}{48} - \frac{1}{64} = \frac{1}{192}$ dove $\frac{1}{64}$ è maggiore di $\frac{1}{48}:2$

Democrito

ed in generale:

$\frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} - \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3 \cdot 4^n}$ dove $\frac{1}{4^n}$ è maggiore di $\frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}:2$

essendo: $\frac{1}{4^n} > \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}:2 \Leftrightarrow 4 < 3 \cdot 2$
(applicando il lemma precedente).

Proseguiamo così indefinitamente: possiamo concludere, in base alla proprietà di esaustione, che la quantità:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \ldots = \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i}$$

può essere resa minore di qualsiasi quantità scelta a piacere. Ad esempio:

$$\frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} < \frac{1}{3} - A \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} > A$$

Ma ciò è assurdo, in quanto avevamo ammesso: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = A$.

- Avendo provato l'impossibilità sia di $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} < \frac{1}{3}$, sia di $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} > \frac{1}{3}$, non ci

resta che concludere con la tesi, ovvero affermare che: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$. ■

Archimede

Archimede

Archimede
(dipinto di Domenico Fetti, 1620)

Archimede
287-212 a. C.

- Nasce a Siracusa, forse è per un certo tempo in Egitto, ad Alessandria
- Non esiste una sua biografia, gli elementi sono estratti da citazioni e biografie di altri personaggi (lo citano: Tito Livio, Plutarco, Polibio, Cicerone, Valerio Massimo)
- Vari aneddoti riguardano la sua vita, la sua morte e la sua tomba

Archimede

- Plutarco racconta (con tre racconti diversi) che fu ucciso da un soldato romano durante l'assedio di Siracusa

Archimede

Lôuccisione di Archimede (Ercolano)

Archimede

Å Colombario romano a cui viene dato il nome di ñTomba di Archimedeò (non può essere la sua, essendo datata tra il I sec. a. C e il I sec. d.C.)

Archimede

Francobollo commemorativo di Archimede emesso dalle Poste Italiane (1983)

Archimede

Cartolina e francobollo commemorativi dellôanno della Matematica (2000)

Archimede

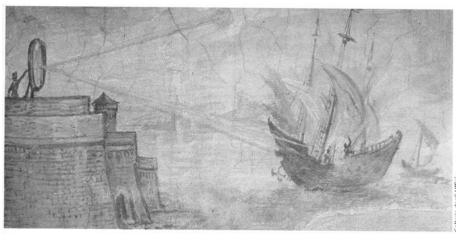
Å Numerose invenzioni meccaniche e strumenti scientifici:

Å ordigni bellici (*manus ferrea*, specchi ustori, *Siracusia*)

Å orologio ad acqua

Å vite senza fine

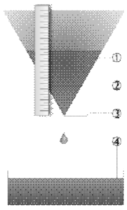
Archimede



G. Parigi, c. 1600 (Uffizi)

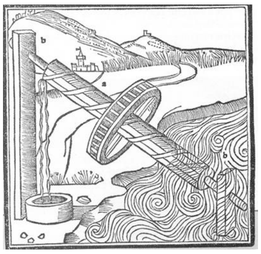
Å **Specchi ustori**

Archimede



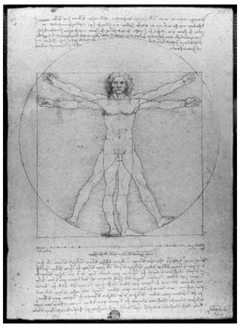
Orologio ad acqua

Archimede



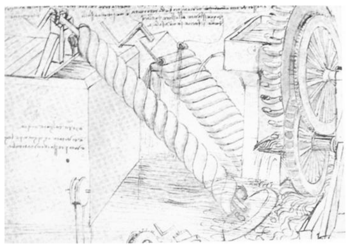
Å **Vite senza fine** (*coclea;* incisione dal *De architectura* di Vitruvio)

Archimede (Vitruvio)



Å Disegno di Leonardo basato sui canoni di Vitruvio

Archimede



Å **Coclea** (Leonardo da Vinci, foglio 26v del *Codice Atlantico*)

Archimede

Å Le dimostrazioni *per esaustione*

Å Archimede intuisce certe tesi e poi le dimostra per esaustione

Å nel Libro I del trattato *Sfera e cilindro* dimostra che lôarea della superficie di una sfera è il quadruplo del suo cerchio massimo

Archimede

Å Dimostra anche varie altre relazioni di geometria solida:

Å volume della sfera è i 2/3 del volume del cilindro circoscritto

Å volume del paraboloide di rotazione di altezza *a* vale ´ $a^2/2$

Archimede

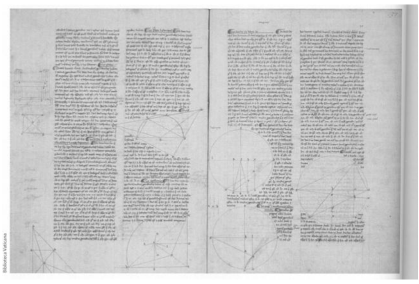
Å Archimede ci è noto attraverso traduzioni dei suoi codici fatte principalmente dagli umanisti

Å **Codice A, Codice B, Codice C**

Å Traduzione in latino di **Guglielmo di Moerbecke** (1269) (ora nella Biblioteca Vaticana)

Å *palinsesti*

Archimede



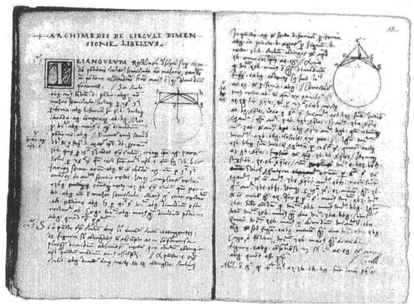
Traduzione latina di Guglielmo di Moerbecke (ca. 1269)
Biblioteca Vaticana

Archimede

Å Vari codici vengono tradotti in latino nel Cinquecento

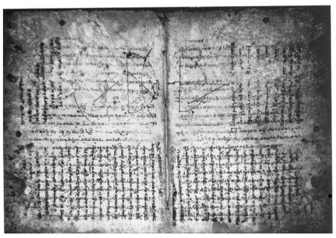
Å Qui la traduzione di Maurolico, in unôedizione del 1685

Archimede



Archimede

Å Vari testi vengono ritrovati in palinsesti nellôOttocento



Palinsesto archimedeo venduto allôasta da Christieôs (1998)

Archimede

Å *Editio princeps* greco-latina (Basilea 1544)

Å Il problema di un testo critico si pone soltanto alla fine del Settecento

Å edizione del *corpus* archimedeo e della sua traduzione latina del danese Heiberg (1880-81)

Å certi testi furono ritrovati soltanto agli inizi del Novecento (*Metodo sui teoremi meccanici*)

Archimede

Å Problemi di cronologia

Å *Cronologia di Knorr* (1978):

Å gruppo giovanile (*cerchio* **ï** *arenario* - *quadratura geometrica della parabola*)

Å gruppo maturo (*quadratura meccanica della parabola* - *sfera e cilindro* - *spirali* - *conoidi e sferoidi* - *metodo*)

Archimede

Å Archimede fu matematico, ingegnere, fisico, si dedicò ad una grande quantità di problemi di matematica e meccanica

Å calcolò aree e volumi servendosi di metodi meccanici, calcolando pesi e baricentri di figure solide

Archimede

Å Spirale di Archimede:

ɟ = *a*ɗ

e suo uso nella rettificazione della circonferenza (si ottiene per *a* = 1/(2´)

Archimede

Å **Il problema dei buoi**

Trovare il numero dei buoi (e giovenche) del Sole che pascolano nella Trinacria (Sicilia), che sono di quattro colori di pellame (bianco, nero, bruno e screziato), quando se ne sappiano le rispettive proporzioni e si sappia quali frazioni costituiscano quadrati perfetti e quali invece si possano mettere in un triangolo. Le soluzioni sono numeri di oltre 80 cifre!!!

Archimede

Å Le proporzioni forniscono 8 equazioni di 1° grado (tori e giovenche di quattro colori), ma le ultime due condizioni, che il numero dei tori bianchi e neri sia un quadrato perfetto, e i bruni e gli screziati formino un numero triangolare porta il problema ad una complicazione notevolissima

Archimede

Å Una soluzione è data dal numero seguente

Å 400991687853254797477933505222730047916079979035371424146523892773542439597161770225437 1