

## Storia della Matematica

10a settimana

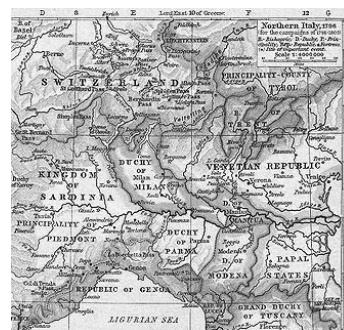
## Fondamenti dell'algebra

### Ruffini

- **Paolo Ruffini** (1765-1822), medico, filosofo e matematico. Professore di matematica all'università di Modena, nel 1798 si rifiutò di giurare fedeltà alla Repubblica Cisalpina e perse la cattedra.



### Ruffini (stati italiani nel 1796)



### Ruffini (stati italiani nel 1803)



### Ruffini



### Ruffini

- Nel 1799 pubblica un libro dedicato all'impossibilità di risolvere equazioni di grado superiore al quarto tramite radicali. Per dimostrare questo asserto inventa i gruppi di permutazioni delle soluzioni. Invia il libro a Lagrange due volte senza avere risposta. L'accoglienza dei matematici è fredda; pubblica altre dimostrazioni nel 1808 e 1813.

### Ruffini

- Cauchy è l'unico a dargli atto della sua scoperta, e pubblica risultati sull'argomento nel 1814.
- Dopo la caduta di Napoleone Ruffini torna all'insegnamento universitario a Modena, sia di medicina che di matematica. Cura i pazienti di tifo e si ammala lui stesso; guarisce parzialmente e scrive un articolo scientifico sul tifo

### Ruffini

- Scrive di filosofia, confutando certe tesi di Laplace, scrive di probabilità, e la applica all'esame di prove giudiziarie.
- Ruffini muore nel 1822 senza che l'ambiente accademico abbia apprezzato la sua scoperta sulle equazioni; quando Abel nel 1824 pubblica una dimostrazione assai simile, questa viene accettata

### Teorema di Ruffini-Abel

- *"Non esiste nessuna formula per le radici di una generica equazione polinomiale di quinto grado (o superiore) in funzione dei coefficienti del polinomio, usando solo le normali operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radici)"*

### Galois

- **Evariste Galois**  
(1811-1832), morì per le ferite riportate in un duello. Ideò la teoria dei gruppi e studiò le radici di un'equazione a coefficienti razionali



### Galois

- La teoria di Galois rende evidente perché sia possibile risolvere le equazioni di grado quattro o inferiore, specificando un criterio generale affinché una particolare equazione polinomiale di un qualsiasi grado abbia le soluzioni esprimibili mediante operazioni algebriche e radicali.

### La trascendenza di $e$ e $\pi$

- **Charles Hermite** (1822-1901) dimostrò per primo la trascendenza di  $e$  (1873).
- La sua dimostrazione fu poi semplificata da vari autori, tra cui Hilbert. Attualmente se ne fa una dimostrazione per assurdo



### La trascendenza di $e$ e $\pi$

- Dimostrare che  $e$  è trascendente (cioè *non* algebrico) significa far vedere che  $e$  non può essere soluzione di un'equazione algebrica (cioè polinomiale) a coefficienti interi.
- Si dimostra per assurdo, cioè dimostrando che è sempre falsa l'uguaglianza

$$a_m e^m + a_{m-1} e^{m-1} + \dots + a_1 e + a_0 = 0,$$

- dove gli  $a_i$  sono numeri interi e  $a_m \neq 0$ .

### La trascendenza di $e$ e $\pi$

- **Carl Ferdinand Lindemann** (1852-1939)
- Lindemann utilizzando la formula  $e^{\pi i} = -1$  ha dimostrato la trascendenza di  $\pi$ , basandosi sul fatto che  $e$  è trascendente



### La trascendenza di $e$ e $\pi$

- Infatti il risultato di Hermite sta alla base del teorema dimostrato nel 1882 da Lindemann. Tale teorema afferma che, se  $\alpha$  un numero algebrico non nullo, allora  $e^\alpha$  è trascendente.
- Indipendentemente, è facile dimostrare che il prodotto di numeri algebrici è algebrico

### La trascendenza di $e$ e $\pi$

Ricordando la famosa formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

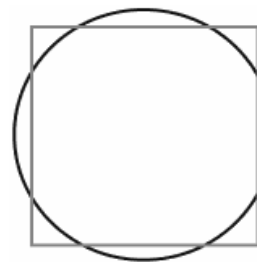
poiché  $i$  è algebrico, in quanto soddisfa

$$i^2 + 1 = 0$$

se  $\pi$  fosse algebrico, lo sarebbe anche  $i\pi$ , e allora  $e^{i\pi}$  dovrebbe essere trascendente, ma non lo è perché soddisfa la formula di Eulero

### La trascendenza di $e$ e $\pi$

- Lindemann ha quindi risolto (dando risposta negativa) il problema della quadratura del cerchio, con la pubblicazione *Über die Zahl* (1882).
- Tuttavia ancora non si sa se  $e^\pi$  sia trascendente



### La trascendenza di $e$ e $\pi$

- Weierstrass dimostrò un teorema più generale:
- se  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sono numeri complessi algebrici a due a due distinti, non esiste nessuna relazione del tipo:

$$a_1 e^{c_1} + a_2 e^{c_2} + \dots + a_n e^{c_n} = 0$$

- in cui  $a_1, \dots, a_n$  siano numeri algebrici non tutti nulli.

### Weierstrass

- **Karl Weierstrass** (1815-1897), figlio di un ispettore delle imposte, non fece studi universitari regolari, dedicandosi alla scherma e anche al bere. Divenne poi professore di ginnasio in provincia



### Weierstrass

- Inviò vari lavori a riviste di matematica e cominciò a diventare noto, finché non gli furono offerte cattedre universitarie, da ultimo quella da lui più ambita, a Berlino.
- Dal 1859 al 1864 Weierstrass pubblicò le sue lezioni di analisi dove si trovano i teoremi che adesso hanno il suo nome.

### Weierstrass

- Tuttavia dopo il 1850 cominciò a soffrire di problemi psichici. Quando insegnava non voleva pubblicare dispense, ma voleva che circolassero soltanto esemplari copiati a mano. Negli ultimi quattro anni continuò ad insegnare pur costretto su una sedia a rotelle

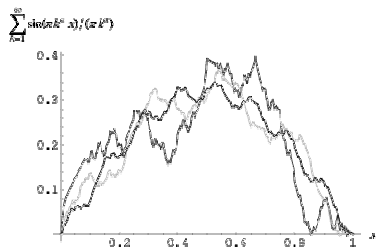
### Weierstrass

- Il teorema che asserisce che ogni funzione continua su un chiuso e limitato ammette massimo e minimo (e quindi è limitata), nella dimostrazione di Weierstrass si basa sul teorema di Bolzano-Weierstrass (*ogni insieme limitato e infinito ammette almeno un punto di accumulazione*)

### Weierstrass

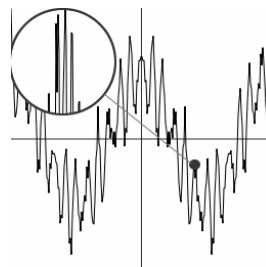
- La **funzione di Weierstrass** è una funzione continua in tutti i punti, ma non derivabile in nessuno. Si possono scrivere varie funzioni con questa proprietà: quella originariamente presentata da Weierstrass nelle sue lezioni è la seguente:
- $f_a(x) = \sum_1 \sin(\pi k^a x) / \pi k^a$

### Weierstrass



Rossa:  $a=2$ ; verde:  $a=3$ ; blu:  $a=4$

### Weierstrass



Le proprietà frattali di una funzione di Weierstrass

### Weierstrass

- Si hanno le sue lezioni sulla variabile complessa, dove è presentato il suo approccio alle funzioni analitiche come sviluppi in serie di potenze, ai punti singolari, ai residui.

### Laurent

- Erano già noti agli specialisti gli sviluppi in serie di **Pierre Laurent** (1813-1854), nonostante le vicissitudini contrarie, che videro i manoscritti di Laurent quasi sempre respinti, malgrado il costante appoggio di Cauchy. In particolare il lavoro che espone gli sviluppi di Laurent fu inviato per il Gran Premio dell'Accademia delle Scienze del 1842, ma oltre i termini.

### Gli ultimi decenni del XIX secolo

- **Johann Dirichlet** (1805-1859), tedesco di origine francese, studia la convergenza delle serie di Fourier e cerca di dimostrare che ogni funzione si può scrivere come somma di una serie di Fourier



### Dirichlet

- Si imbatte invece in una funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali; questa non ammette una scrittura sotto forma di serie di Fourier (*funzione di Dirichlet*)
- Ciò porta Dirichlet ad estendere il concetto di funzione, che viene sganciata da qualsiasi espressione analitica e che è il concetto che si ha ancora oggi

## Dirichlet

- Tale funzione non è integrabile secondo Riemann, ma lo è secondo Lebesgue (e l'integrale di Lebesgue vale 0).

## Lebesgue

- **Henri Léon Lebesgue** (1875 – 1941). Uno dei più famosi matematici francesi grazie alla sua teoria dell'integrazione, pubblicata per la prima volta nella sua tesi, *Intégrale, longueur, aire* nel 1902.



## Lebesgue

- Il problema dell'integrazione, considerato come la ricerca di una primitiva di una funzione, è l'idea chiave della tesi di Lebesgue, che presenta il problema nel suo contesto storico, facendo riferimento a Cauchy, Dirichlet e Riemann.

## Lebesgue

- Lebesgue illustra sei condizioni che è opportuno che l'integrale soddisfi, l'ultima delle quali è:
- *Se la successione  $f_n(x)$  tende al limite  $f(x)$ , l'integrale di  $f_n(x)$  tenderà all'integrale di  $f(x)$ .*
- Si richiede quindi che sia sempre lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale

## Lebesgue

- Mostra, inoltre, come le sue condizioni conducano alla teoria della misura, al concetto di funzioni misurabili.
- Successivamente si concentrò ancora sulle funzioni trigonometriche con il suo articolo *Sur les séries trigonométriques* (1903).

## Lebesgue

- In quest'opera presentò i tre principali teoremi:
- una serie trigonometrica convergente ad una funzione limitata è una serie di Fourier,
- il coefficiente n-esimo di Fourier tende a zero (*Lemma di Riemann-Lebesgue*),
- una serie di Fourier è integrabile termine a termine