

Storia della Matematica

11a settimana

Critica dei principi

Cantor

- **Georg Cantor** (1845-1918)
- Professore all'università di Halle.
- Fondatore della teoria degli insiemi (1874-1884), con la loro cardinalità.

Fu avversato da Kronecker

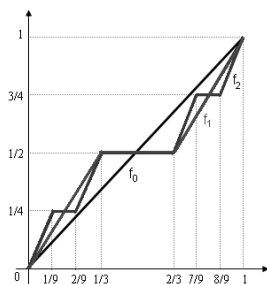


Cantor

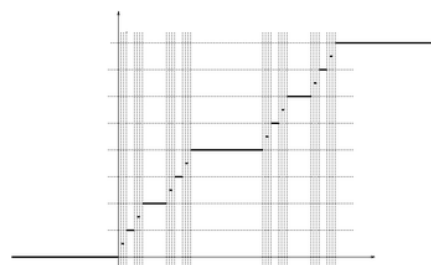
I principi ai tempi di Cantor

- Cantor dimostrò la **numerabilità dei razionali** e pose il problema dell'**ordine di infinito dei reali** (ipotesi del continuo).
- A lui si devono studi sulla continuità assoluta (**funzione di Cantor**) e su insiemi di misura nulla, eppure con la potenza del continuo (**insieme di Cantor**)

Cantor



Cantor



Cantor

- La funzione di Cantor è una funzione continua, ma non è *assolutamente continua* (non vale la tesi del teor. fond. del calcolo integrale).
- L'insieme di Cantor è quello che rimane quando sono stati tolti tutti i terzi centrali (ad esempio vi appartiene $1/4$)

Cantor

- Cantor chiamò 2^T la cardinalità dell'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di T (perché se T avesse un numero finito k di elementi, la sua cardinalità sarebbe 2^k)

Ipotesi del continuo

- *Ipotesi del continuo*:
- Non esistono numeri cardinali compresi tra la potenza dei naturali $\aleph_0$ e quella dei reali, che è $2^{\aleph_0}$.
- Cantor cercò a lungo di dimostrarlo, ma poi prese a pensare che fosse falsa.
- *Ipotesi generalizzata del continuo*:
- Data una cardinalità T non esiste nessuna cardinalità compresa tra T e 2^T

Ipotesi del continuo

- Nell'ultimo decennio c'è stato ancora interesse per queste congetture, con una tendenza a confutarle, dimostrando che la loro accettazione avrebbe contraddetto altre congetture che apparivano maggiormente "evidenti"

Zermelo e l'assioma della scelta

Zermelo

- **Ernst Zermelo** (1871-1953) si occupò dei fondamenti della teoria degli insiemi. Il sistema di assiomi attualmente accettato si dice di Zermelo-Fraenkel.



Zermelo

- E' sua la formulazione dell'assioma della scelta (1904)

Zermelo

- Assioma della scelta (formulazione intuitiva):
- *dati infiniti sacchi ciascuno con infiniti fagioli è possibile fare la minestra di fagioli prendendo un fagiolo da ogni sacco*
- Assunto l'assioma della scelta, Zermelo ne dimostrò l'equivalenza con l'ipotesi del buon ordinamento

Zermelo

- Ipotesi del buon ordinamento:
- *Ogni insieme si può mettere in ordine, scegliendo un primo elemento*

Assioma della scelta

- Applicazione dell'assioma della scelta:
- *dato un punto P di accumulazione per un insieme I , esiste una successione di punti di I che converge a P*

Assioma della scelta

- L'assioma della scelta è una congettura?
- Nel 1940 Gödel dimostra che se è coerente il sistema di Zermelo-Fraenkel privato dell'assioma della scelta, lo è anche se tale assioma vi viene aggiunto, e quindi tale assioma non può essere confutato.
- Il sistema ZF a cui viene aggiunto l'assioma della scelta viene indicato con ZFC (Zermelo-Fraenkel + Choice)

Assioma della scelta

- Del pari l'ipotesi del continuo è coerente con il sistema ZF sia che questo comprenda l'assioma della scelta sia che non lo comprenda

Assioma della scelta

- Nel 1963 Cohen dimostra che sia l'ipotesi del continuo che l'assioma della scelta sono indipendenti dagli altri assiomi del sistema ZF
- Queste congetture quindi cessano di essere teoremi da dimostrare ma diventano caratteristiche di sistemi che regolano la teoria degli insiemi

Giuseppe Peano

- **Giuseppe Peano** (1958-1932)
Matematico, logico, ideatore di una lingua universale scientifica basata sul latino (latino sine flexione)



Postulati di Peano

- Esiste un numero naturale, 0
- Ogni numero naturale ha un numero naturale successore
- Numeri diversi hanno successori diversi
- 0 non è il successore di alcun numero naturale
- Ogni insieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali (assioma dell'induzione)

Dalle funzioni alle distribuzioni

- Il concetto di *funzione* istituito da Dirichlet e l'integrale di Lebesgue non si prestavano a tutti i casi della fisica.
- Dopo una prima generalizzazione ad opera di Heaviside (1850-1925) e la teoria delle funzioni generalizzate della scuola sovietica (Sobolev, Gelfand, Vilenkin) i fisici hanno iniziato ad utilizzare la "funzione" di Dirac

Dirac

- **Paul Adrien Maurice Dirac** (1902–1984) è stato un fisico e matematico britannico di famiglia ginevrina; come fisico teorico viene annoverato tra i fondatori della fisica quantistica.



Dirac

- La **delta di Dirac**, o **impulso di Dirac**, è una funzione generalizzata la cui introduzione formale ha spianato la strada per lo studio della teoria delle distribuzioni. Informalmente la delta di Dirac vale:

$$\delta(x) = 0 \text{ per } x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Dirac

- Viene utilizzata per rappresentare approssimativamente fenomeni come i picchi alti e stretti di alcune funzioni o le loro discontinuità: è lo stesso tipo di astrazione che si fa per la carica puntiforme, la massa puntiforme, l'elettrone puntiforme.

Laurent Schwartz

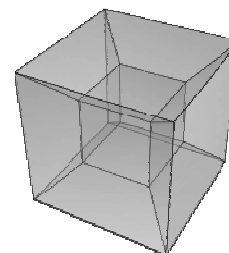
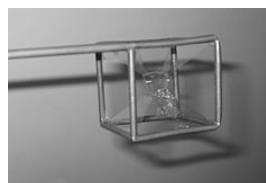
- Laurent Schwartz (1915-2002)
- E' famoso per la teoria delle distribuzioni intese come funzionali definiti sulle funzioni C^∞ e a supporto compatto
- Fu anche un appassionato entomologo



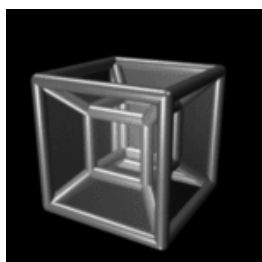
Il problema di Plateau

- Joseph Plateau pubblicò il suo trattato sulle bolle e lamine di sapone nel 1873, ma le bolle avevano già una lunga tradizione in ambiente artistico e letterario. Il problema di Plateau consiste nel trovare, per una generica curva nello spazio tridimensionale, la superficie con la minima area possibile delimitata dalla curva stessa.

Il problema di Plateau: ipercubo



Il problema di Plateau: ipercubo



Il problema di Plateau

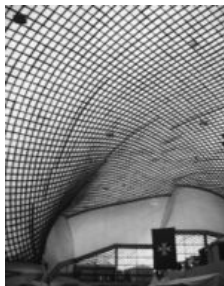
- **Paul Otto Frei** (1925) è un architetto tedesco, esponente dello strutturalismo ed ha realizzato forme particolari.

Il problema di Plateau

Stadio di Monaco



Mannheim: Multihalle

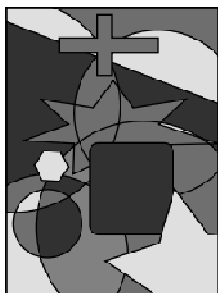


Il problema dei quattro colori

- Il **teorema dei quattro colori** è un teorema della matematica che afferma che data una superficie piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore. Due regioni sono dette *adiacenti* se hanno almeno un segmento di confine in comune

Il problema dei quattro colori

- Ciascuna regione deve inoltre occupare un territorio connesso. È immediato trovare mappe per le quali tre soli colori non sono sufficienti. Non è eccessivamente difficile dimostrare che ne bastano al più cinque



Il problema dei quattro colori

- Tuttavia dimostrare che ne siano strettamente necessari almeno quattro è particolarmente complesso, tanto che la dimostrazione di questo teorema ha richiesto, tra l'altro, un estensivo ricorso al computer, per una delle prime volte nella storia della matematica.

Il problema dei quattro colori

- La congettura venne presentata per la prima volta nel 1852, quando Francis Guthrie, uno studente di Augustus De Morgan, si accorse che per colorare una mappa delle contee britanniche erano sufficienti quattro colori.
- La prima, acclamata "dimostrazione", a lungo riconosciuta come definitiva, fu formulata nel 1879 da Alfred Kempe.

Il problema dei quattro colori

- Nel 1880 Peter Tait annunciò di avere trovato una ulteriore dimostrazione del teorema. Nel 1890 Percy Heawood scoprì l'errore che minava la dimostrazione di Kempe, ben undici anni dopo la sua formulazione; l'anno successivo, ad opera di Julius Petersen, anche la dimostrazione di Tait fu riconosciuta errata.

Il problema dei quattro colori

- La definitiva dimostrazione del teorema per quattro soli colori è stata fornita nel 1977 da parte di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois, grazie a un complesso algoritmo informatico.

Il problema dei quattro colori

- La dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1.936 configurazioni (poi ulteriormente ridotte a 1.476), per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso dal computer.

Il problema dei quattro colori

- Qualsiasi mappa può infatti essere ricondotta a un numero finito, sebbene assai elevato, di topologie "notevoli" tramite operazioni che modificano le relative posizioni delle regioni che la costituiscono, ma non le proprietà topologiche della mappa stessa.

Il problema dei quattro colori

- Per ridurre al minimo la possibilità di errore, il programma fu eseguito su due diverse macchine con due algoritmi indipendenti; per completare l'analisi di tutti i casi possibili fu necessario far lavorare i computer per migliaia di ore. Alla fine, servirono più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche che costituivano la dimostrazione.

Il problema dei quattro colori

- Il rivoluzionario utilizzo di algoritmi informatici per verificare l'esattezza della congettura scatenò grandi polemiche sull'affidabilità di questi metodi. Il fatto che la dimostrazione fosse basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti portò alcuni matematici a contestarne l'effettiva validità:

Il problema dei quattro colori

- sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per l'impossibilità di avere la certezza che l'algoritmo fosse implementato correttamente.
- La logica e la teoria dell'informazione ci dicono infatti che non è possibile dimostrare la correttezza di un algoritmo, ma tuttavia sono sufficienti semplici controprove per dimostrarne la non correttezza.

Il problema dei quattro colori

- Ad ogni modo, nonostante le accuse di scarsa "eleganza", nell'algoritmo non è mai stato trovato alcun errore.
- Infine, nel 2000, Ashay Dharwadker propose una nuova dimostrazione del teorema che richiede l'utilizzo della teoria dei gruppi.

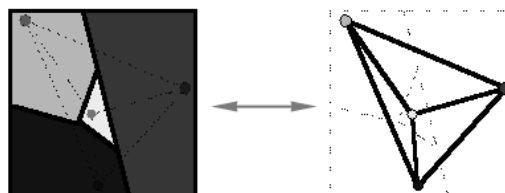
Il problema dei quattro colori

- Il teorema può essere espresso in forma più comprensibile sfruttando la teoria dei grafi. In questa formulazione i vertici di ciascun grafo planare possono essere colorati utilizzando al massimo quattro colori, in modo tale che due vertici adiacenti non ricevano mai lo stesso colore. In breve, si può affermare che "ogni grafo planare è 4-colorabile".

Il problema dei quattro colori

- Questa rappresentazione associa ogni regione della mappa a un vertice del grafo; due vertici sono connessi da uno spigolo se e solo se le due regioni corrispondenti hanno un segmento di bordo in comune.

Il problema dei quattro colori



Il problema dei quattro colori: generalizzazione

- È inoltre possibile considerare il problema della colorazione su una superficie piuttosto che su un piano. Il problema applicato alla sfera è equivalente a quello sul piano. Per le superfici chiuse (orientate come il toro o non orientate come il nastro di Möbius) di genere positivo, il massimo numero di colori necessari dipende dalla caratteristica di Eulero della superficie

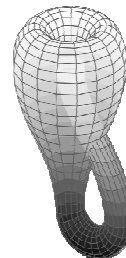
Il problema dei quattro colori : generalizzazione

- Per esempio, il toro ha caratteristica di Eulero $= 0$ e sono necessari al massimo sette colori per colorare qualsiasi mappa su una superficie toroidale.
- La sola eccezione è la Bottiglia di Klein, la quale ha caratteristica di Eulero uguale a 0 e richiede sei colori.

Il problema dei quattro colori : generalizzazione



Bottiglia di Klein



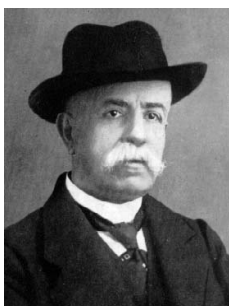
Nastro di Möbius



Tre matematici padovani

Gregorio Ricci-Curbastro

- **Gregorio Ricci-Curbastro** (1853-1925)
- Di Lugo di Romagna, inizia l'università a Roma, ma gli studi si interrompono nel 1870 per la breccia di Porta Pia; studia poi a Bologna e quindi a Pisa, allievo di Dini.

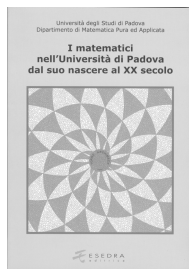


Gregorio Ricci-Curbastro

- Ricci-Curbastro insegna a Padova varie materie matematiche dal 1880 fino al 1925.
- È l'ideatore del Seminario Matematico come comunità dei matematici appartenenti a tutte le facoltà, struttura che anticipa l'odierna struttura dipartimentale introdotta con la riforma del 1980. Al suo nome è intitolato il Seminario stesso e il suo busto si trova nei locali della Biblioteca.

Gregorio Ricci-Curbastro

- Nel 1901 pronuncia il “discorso inaugurale” dal titolo “Origini e sviluppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria”, ove espone lo sviluppo storico che ha portato alle geometrie non euclidee



Tullio Levi-Civita

- Il contributo più importante di Ricci è il *calcolo differenziale assoluto*, elaborato insieme al suo allievo padovano **Tullio Levi-Civita** (1873-1941), fondamento del calcolo tensoriale che sarà la base della teoria della relatività generale.



Tullio Levi-Civita

- Levi-Civita contribuisce allo studio degli n corpi; andrà a Roma nel primo dopoguerra, e contribuirà allo studio delle equazioni di Dirac.
- Le leggi razziali del 1938 lo privano della cattedra e resta isolato dalla comunità scientifica.

Giuseppe Colombo

- **Giuseppe Colombo** detto *Bepi* (1920-1984) matematico, fisico e astronomo padovano.
- Nono di dieci fratelli, partecipò alla campagna di Russia, fu decorato al valor militare, fu ferito e rimpatriato fortunatamente.

Giuseppe Colombo

- Studente alla Scuola Normale di Pisa, poi assistente e infine professore di Meccanica Applicata presso la facoltà di Ingegneria di Padova. Ha insegnato in varie università italiane e americane, e ha preso parte a numerose ricerche spaziali, sia nella NASA che nell'ESA (Ente Spaziale Europeo).

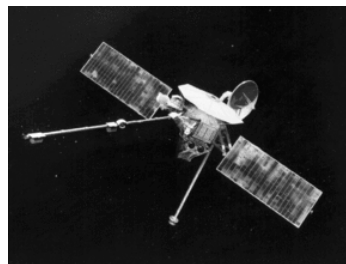
Giuseppe Colombo

- Il suo nome è legato al **satellite al guinzaglio** (*Tethered*, sviluppato dai primi anni '70) e all'idea di una zattera spaziale creata riutilizzando i serbatoi di propellente lasciati nello spazio dagli Shuttle.
- Un'altra sua idea fu quella di lanciare enormi specchi in orbita per concentrare i raggi solari su alcune zone della Terra per allontanare la nebbia.

Giuseppe Colombo

- Contribuì poi all'impresa del Mariner 10 del 1974, tra l'altro proponendo per la prima volta l'uso di una fionda gravitazionale con Venere per far incontrare la sonda con Mercurio ben 3 volte; scoprì infatti l'accoppiamento tra rivoluzione e rotazione di Mercurio (il pianeta compie tre rotazioni intorno al proprio asse ogni due rivoluzioni intorno al Sole).

Giuseppe Colombo



Mariner 10

Giuseppe Colombo

- Mercurio è stato visitato per la prima volta nel 1974-75 dalla sonda statunitense Mariner 10.
- Concepito per l'osservazione di Venere e Mercurio, il Mariner 10 venne lanciato il 3 novembre 1973 e raggiunse i dintorni di Mercurio nel 1974.

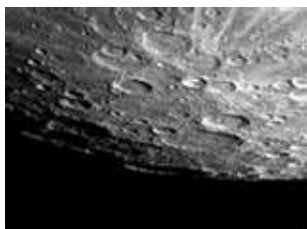
Giuseppe Colombo

- Il Mariner 10 ha teletrasmissionato a terra fotografie registrate nel corso di tre successivi sorvoli. La sonda si avvicinò fino ad alcune centinaia di chilometri dal pianeta, trasmettendo circa 6000 fotografie e mappando il 40% della superficie mercuriana.

Giuseppe Colombo

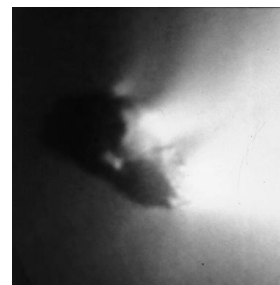


Mercurio



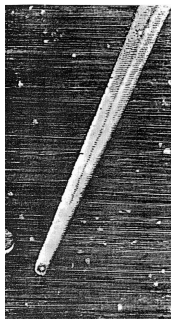
Giuseppe Colombo

- Collaborò anche al lancio della sonda Giotto, che nel 1986 incontrò la cometa di Halley. Il nome venne proposto da lui, in omaggio alla Natività di Giotto della Cappella degli Scrovegni, in cui è raffigurata la cometa.



Giuseppe Colombo

- Ricordiamo l'osservazione della cometa fatta da Halley nel 1682



Giuseppe Colombo

- Ha anche spiegato che una variazione di luminosità dell'anello A di Saturno è dovuta alla sua struttura spiraliforme.
- Ha ottenuto vari premi prestigiosi, tra i quali la medaglia d'oro della NASA.

Giuseppe Colombo

- La NASA ha lanciato nel 2004 la sonda MESSENGER, il cui primo passaggio ravvicinato di Mercurio, avvenuto il 14 gennaio 2008, è stato seguito da un altro (ottobre) e poi da un terzo (settembre 2009) prima dell'ingresso in orbita attorno al pianeta previsto per il 18 marzo 2011. In seguito al primo "fly-by" di Mercurio, la sonda MESSENGER ha inviato a terra le prime immagini dell'emisfero "sconosciuto"

Giuseppe Colombo

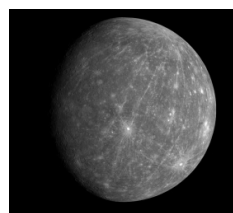
- MESSENGER:
- MErcury Surface, Space ENvironment, GEochemistry, and Ranging

Giuseppe Colombo



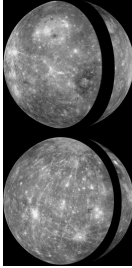
Mercurio
14.1.2008

Giuseppe Colombo



Mercurio
Dicembre 2008

Giuseppe Colombo



Mercurio un anno
fa
12 maggio 2009

Giuseppe Colombo

- L'ESA (Ente Spaziale Europeo) gli ha dedicato una missione *BepiColombo* prevista per il 2013-2019, volta all'esplorazione di Mercurio.