

Storia della Matematica

3a settimana

La matematica indiana

La matematica indiana

- La **geometria** fu essenzialmente derivata dai greci
- Nel V sec. d. C. abbiamo **tavole trigonometriche**
- L'**aritmetica**, nata parecchi secoli prima di Cristo, assume la notazione posizionale decimale attorno al 600 d. C.
- Il primo simbolo indiano che individua lo **zero** compare in un'iscrizione dell'876 per indicare una posizione vuota nella scrittura posizionale

La matematica indiana

- Ricordiamo solo due nomi:
- **Brahmagupta** (tra il IV e l'VIII secolo): regole pratiche di debiti e crediti, con introduzione di numeri negativi
- **Baskara** (1114-1185) si occupò di numeri relativi, anche con radici di entrambi i segni come soluzioni di equazioni; scrisse *Lilavati*, una raccolta di problemi di algebra elementare

La matematica indiana

- Nelle opere dei matematici indiani si trovano anche calcoli con lo 0 come

$$a+0 = a, \quad a-0 = a, \quad a \cdot 0 = 0$$

- la divisione per 0 viene considerata come un risultato immutabile, che non cambia qualsiasi cosa le si aggiunga o tolga, così come immutabile è la divinità, e viene chiamata *quantità infinita*

La matematica araba

La matematica araba

- L'algebra ha avuto una nascita molto antica: già egiziani e babilonesi sapevano fare calcoli algebrici come li facciamo noi adesso, solo le regole e le notazioni erano espresse in maniera diversa
- La notazione per lo zero (presa dagli indiani) era la seguente:



- “Ṣifr = vuoto”, parola che poi fu trascritta e latinizzata in *zephirum* (forse da Leonardo)

La matematica araba

- Dalla parola Ṣifr deriva la parola **cifra**.
- Siccome lo zero era un segno mistico, i nostri termini *cifrario*, *forma cifrata* significano “cose nascoste”.
- Confrontare con l'inglese *cipher* (che significa zero e anche cifra).

La matematica araba Al-Kwarizmi

- Il califfo al Mamun, figlio di Al-Rashid, fondò a Bagdad una “città del sapere”, con una ricca biblioteca e un osservatorio astronomico. Vi fu chiamato, tra gli altri scienziati, un matematico e astronomo la cui famiglia proveniva da una regione, il Kwarizm, a sud del lago d’Aral: **Abu Jafar Muhammad ibn Mousa Al-Kwarizmi**

La matematica araba Al-Kwarizmi



La matematica araba Al-Kwarizmi

- Al-Kwarizmi (ca. 790 - ca. 840) scrisse cinque trattati, su aritmetica, algebra, astronomia, calendario e geografia
- Il trattato di aritmetica (giuntoci solo attraverso le traduzioni latine) è il primo trattato arabo in cui viene esposto il sistema posizionale decimale, che riporta le tecniche indiane del sesto secolo e che diffonderà tale sistema nell’Europa occidentale

La matematica araba Al-Kwarizmi

- Fondamentale per la diffusione dell’algebra e delle sue tecniche di calcolo è l’opera di Al-Kwarizmi:

Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala
(Il libro conciso sul calcolo con la restaurazione e l’opposizione)

Il testo di Al-Kwarizmi



La matematica araba Al-Kwarizmi

- **jabr** = restaurazione (il portare una quantità da un membro all'altro di un'equazione, rendendolo positivo); deriva da un verbo che significa "riparare qualcosa di rotto"
- **muqabala** = opposizione (sostituzioni di due termini dello stesso tipo in entrambi i membri di un'equazione); deriva da un verbo che significa "confrontare due cose contrapponendole"

La matematica araba Al-Kwarizmi

- Il trattato di Al-Kwarizmi ci è giunto anche in arabo: tratta di equazioni utili per eredità, lasciti, divisioni, cause legali riguardanti misurazione di terreni e scavi di canali. Non è usato nessun simbolismo
- Le traduzioni latine cominciano ad indicare l'incognita (in arabo: *jizr*) con **res** e il suo quadrato (in arabo: *mal*) con **census**
- Da traduzioni latine seguiranno poi traduzioni in volgare

La matematica araba Al-Kwarizmi

- La traduzione latina del trattato di Al-Kwarizmi immette nella lingua due parole:
- **Algoarismus** come autore, da cui il termine **algoritmo**
- **Algiabra** da cui **algebra**

La matematica araba Al-Kwarizmi

- Al-Kwarizmi tratta equazioni di 2° grado del tipo
 $x^2 + a = bx$

il suo procedimento, scritto in simboli moderni, riporta alla formula risolutiva attuale quando il primo coefficiente è uguale a 1, con il segno $\pm$ davanti alla radice; vengono però escluse le radici negative e vengono considerate impossibili quelle che adesso chiameremmo *immaginarie*

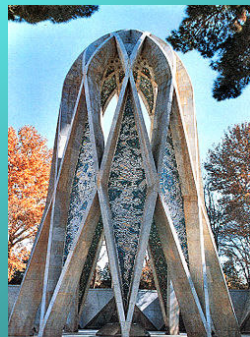
La matematica araba - Kayyam

- Omar Kayyam** (1048-1131), poeta, matematico ed astronomo (mausoleo di Neyshabur)
- Autore di *Algebra*, dove espone procedimenti risolutivi ed anche una soluzione grafica di un'equazione di terzo grado (considerando solo radici positive)



La matematica araba - Kayyam

- Mausoleo di Omar Kayyam a Neyshabur



La matematica araba - Kayyam

- Omar Kayyam divenne famoso in Occidente per le sue "quartine" (*rubayat*), ispirate al vino, alla gioia e alle donne. Ne divenne noto un rifacimento/traduzione in inglese fatto nell'Ottocento da Edward Fitzgerald (1859), che fu poi tradotto in altre lingue occidentali. Direttamente dal persiano uscì una traduzione in esperanto (Warighien, 1953), poi una traduzione in italiano (Bausani)

La matematica araba - Kayyam

O Hayyām, se sei ebbro di vino, sta' lieto,
se te la spassi con belle dal volto di luna, sta'
lieto.

Poiché ogni cosa del mondo nel nulla finisce,
pensa che tu sei nulla, e già che sei, sta' lieto.

La matematica araba

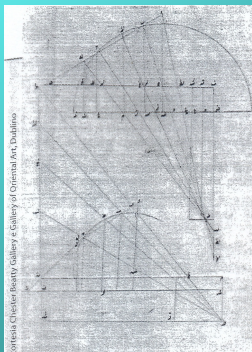
Alcuni matematici arabi si occuparono
anche di equazioni indeterminate; in
particolare tentarono di dimostrare che
l'equazione

$$x^3 + y^3 = z^3$$

non ha soluzioni intere (anticipando quindi
il cosiddetto “ultimo teorema di Fermat”)

La matematica araba

- La geometria fu essenzialmente derivata da quella greca. Si occuparono molto di piastrellatura e quindi di forme accostabili in modo da ricoprire intere superficie



La matematica araba



Alhambra (Granada)

La matematica nel Medioevo

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Leonardo Bigollo da Pisa, detto **Fibonacci** (1170-1250)



L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- 1202: ***Liber abaci***
15 capitoli, nei quali viene presentata sistematicamente per la prima volta nel mondo occidentale la numerazione posizionale in base 10, con la trascrizione in questo sistema di numeri scritti in base sessagesimale e in maniera romana



L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Il *Liber abaci* propone numerosi problemi; spesso tuttavia non vengono risolti tramite equazioni di primo grado come sarebbe usuale oggi, ma tramite la *falsa posizione*, cioè “se la soluzione fosse..., allora dovrebbe essere.....”

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Dal *Liber abaci*
- *Un lavoratore avrebbe dovuto prendere 7 bisanti al mese se avesse lavorato, mentre avrebbe dovuto restituire 4 bisanti per un mese di assenza. Il lavoratore lavorò saltuariamente e alla fine del mese (30 gg.) ricevette un solo bisante. Quanto lavorò?*

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Attualmente si imposterebbe un'equazione di 1° grado:

$$7x/30 - 4(30-x)/30 = 1$$
- che fornisce come soluzione $x = 150/11$, cioè 13 gg. e 7/11
- Fibonacci invece fa il calcolo supponendo che il lavoratore abbia lavorato 15 gg.: avrebbe percepito 1 bisante e $\frac{1}{2}$; se ne avesse lavorati 20 avrebbe percepito 3 bisanti e $\frac{1}{3}$

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Fibonacci imposta poi la proporzione $(20-15) : [3+1/3 - (1+1/2)] = (20 - x) : (3+1/3 - 1)$ il che porta allo stesso risultato
- Nel *Liber quadratorum* Fibonacci presenta vari artifici per risolvere equazioni, in particolare come ridurre quadrati a somme di quadrati

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Fibonacci imposta e risolve con artifici diversi varie equazioni di secondo grado; va tenuto presente che equazioni del tipo

$$ax^2 + bx = c \quad ax^2 + c = bx \quad bx + c = ax^2$$
erano considerate sostanzialmente diverse, perché i coefficienti erano tutti positivi
- Dà anche la formula risolutiva generale per l'equazione $x^2 + bx = c$

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- Un altro problema noto che si trova nel *Liber abaci* è quello che ha dato origine alla cosiddetta **successione di Fibonacci**:

Data una coppia iniziale di conigli fecondi dal secondo mese in poi che genera una coppia di conigli al mese, i quali a loro volta generano dal secondo mese in poi una coppia di conigli, quanti conigli ci saranno dopo x mesi, supponendo che nessuno muoia?

L'Italia del Medioevo - Fibonacci

- La soluzione produce una successione di numeri

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 ...

nella quale, a partire da 2, ogni elemento è la somma dei due precedenti

- La successione di Fibonacci la si incontra in numerose situazioni

Il tardo Medioevo in Italia

- È attribuito al maestro Dardi di Pisa il trattato *Aliabraa Argibra* (1344) in cui ci sono formule risolutive di intere classi di equazioni di terzo e quarto grado del tipo

$$(h+x)^n = k$$

con $n = 3, 4$, derivanti da calcoli di interessi per 3 o 4 anni

Il tardo Medioevo in Italia

- Vari matematici cercarono scritture più semplici dell'algebra retorica: Giovanni del Sodo, Raffaello Canacci, Piero della Francesca (che risolve equazioni del 5° grado)

Il tardo Medioevo in Europa

- **Moses ibn Timmon**, membro di una famiglia ebraica emigrata dalla Spagna in Provenza, tradusse in ebraico gli *Elementi* di Euclide (1270)

Il tardo Medioevo in Europa

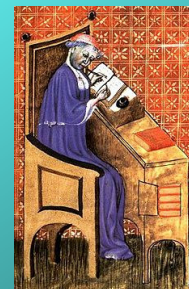
- **Levi Ben Gerson** (1288-1344), un ebreo francese, scrisse un commento ai primi 5 libri di Euclide, si occupò di trigonometria e di astronomia
- Tentò di ridurre i postulati di Euclide, riprese la notazione tolemaica della misura degli angoli in gradi e in frazioni sessagesimali

Il tardo Medioevo in Europa

- In particolare Levi Ben Gerson introdusse il *teorema dei seni*:
- *i lati di un triangolo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti*

Il tardo Medioevo in Europa

- **Nicolas d'Oresme** (1323-1382)
matematico, fisico,
astronomo,
economista e
musicologo francese
- Fu amico e consigliere del re di Francia Carlo V, poi canonico della cattedrale di Rouen



Il tardo Medioevo in Europa

- Oresme scrisse in latino e in francese, contribuendo a creare la terminologia francese in musica e in matematica
- Scrisse il *Tractatus de configuratione qualitatum et motuum*; in questo si può intravedere un sistema di coordinate, *latitudo* e *longitudo*, che precede le coordinate cartesiane

Il tardo Medioevo in Europa

- Oresme tentò di raffigurare un grafico della velocità ponendo in ascissa i tempi e in ordinata la velocità di un corpo (*Tractatus de latitudinibus formarum*)



Il tardo Medioevo in Europa

- Oresme si occupò esplicitamente dell'area sottostante e scoprì che essa esprimeva lo spazio percorso, ma non ne seppe spiegare il perché
- Si occupò anche di funzioni di più di due variabili, intuendo che per esprimere quelle sarebbero state necessarie coordinate in spazi di più di tre dimensioni

Il tardo Medioevo in Europa

- Oresme si occupò anche di procedimenti infiniti, in particolare di serie numeriche e dette la dimostrazione (che si dà ancora oggi) della divergenza della serie armonica; detta in termini moderni, dimostrò che si possono raggruppare i termini in gruppi consecutivi di 2^n termini, ciascuno dei quali è $> 1/2$, e quindi la somma risulta maggiore di un qualsiasi numero prefissato

Il tardo Medioevo in Europa

- Probabilmente ad Oresme o ad un suo copista si deve il primo uso del simbolo “+” per indicare l’addizione come abbreviazione di “et” (la “e” diventa un ricciolo alla base della “t” il cui taglio è evidenziato, dapprima un po’ obliquo, poi orizzontale)
- Il segno “-” è di origine più incerta (forse una semplificazione rapida della *m* di “minus”); certi segni diventano stabili soltanto con la stampa

Il tardo Medioevo in Europa

- Oresme ideò una forma primitiva della scrittura degli esponenti e sviluppò il primo metodo di calcolo degli esponenti frazionari; usò nel suo *Algorismus proportionum* regole che oggi si scriverebbero così:

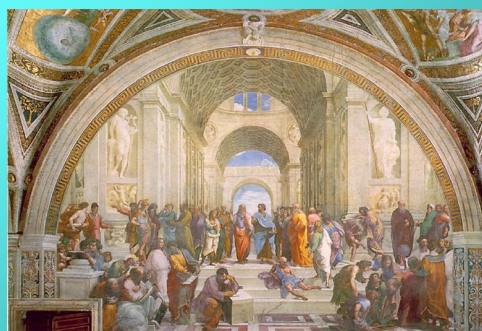
$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Altre figure del Medioevo

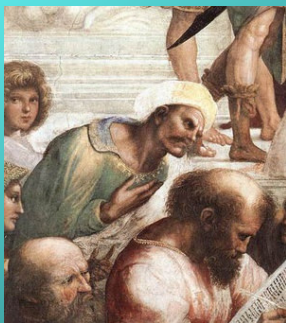
- Abū l-Walīd Muhammad ibn Ahmad Muhammad ibn Rushd, diventato nel Medioevo Aven Roshd e infine Averroes (**Averroè**) (1126 – 1198) è stato un filosofo, medico, matematico e giurisperito spagnolo

Altre figure del Medioevo



Altre figure del Medioevo

- Averroè tradusse in arabo e commentò opere di Aristotele (citato da Dante); sue opere furono poi tradotte in latino e portarono in occidente la cultura filosofica greca

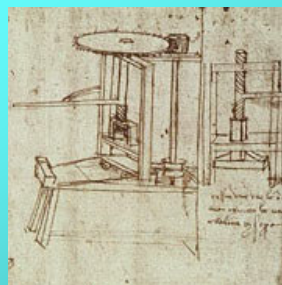


Altre figure del Medioevo

- Un altro filosofo arabo sosteneva che il pensiero di Aristotele, e la filosofia in generale, fossero in contraddizione con l'Islam. La tesi fondamentale di Averroè era esattamente opposta: egli sosteneva che la verità può essere raggiunta sia attraverso la religione rivelata sia attraverso la filosofia speculativa. Tesi opposte ebbe Tommaso d'Aquino

Il primo libro a stampa

La stampa



Torchio da stampa
(Leonardo, Codice
Atlantico, foglio
995 recto, 1497)

Il primo libro a stampa

- 10 dicembre 1478: esce a Treviso *Larte de labbacho*, un manuale anonimo, noto anche come *Aritmetica di Treviso*
- È un manualetto di 62 pagine, e insegna a fare di conto per chi “vuole usare larte de la merchadantia”

Il primo libro a stampa

- Nel libretto è fatta netta distinzione tra numero e “figura” cioè il simbolo con cui si esprimono le cifre

Il primo libro a stampa



L'abaco era usato come strumento di calcolo già al tempo degli egiziani ($\alpha\beta\alpha\xi$ in greco significava “tavoletta”)

Il primo libro a stampa

- Non sono ancora usati i segni di addizione, sottrazione ecc., ma le operazioni sono indicate con:
- *lungere*, indicato con *et*
- *Levare* o *cavare*, indicato con *de*
- *Moltiplicare*, indicato con *fia*
- *Partire*, indicato con *in*

Il primo libro a stampa

- La *addizione* è insegnata col riporto, come adesso
- Della *sottrazione* si dice che “mazor da menore non può fir cavato” e viene insegnato il metodo col prestito, ma anche quello di incrementare di una unità la cifra successiva del sottraendo piuttosto che ricordare il prestito

Il primo libro a stampa

- La *moltiplicazione* viene insegnata come adesso, ma quando si tratta di fattori di due cifre, viene insegnato il metodo *a crocetta*

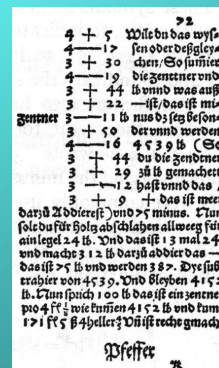
$$\begin{array}{r} 43 \\ \times \\ 25 \\ \hline 1075 \end{array}$$

Il primo libro a stampa

- Probabilmente da questo metodo è nato il simbolo $\times$ per indicare il prodotto, che comunque appare soltanto nella prima metà del '600 (oramai i libri sono tutti a stampa)

Segni di addizione e sottrazione

- Questa è un'edizione del 1526 di un libro di aritmetica di Johannes Widman, matematico tedesco; sembra essere il primo *a stampa* in cui sono usati i segni “+” e “-” come segni di operazioni



Segni di addizione e sottrazione

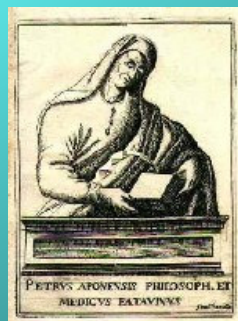
- Semplici problemi algebrici:
- cambio di segno portando un valore al di là del simbolo di uguaglianza
- quadrato di un binomio

		Rechenkunst.	
		$D - E = 1B$	
		$D = E + 1B$	
		$\therefore D > E$	
		Auf D und E das übrige findet.	
$a = 2$	1	$a + b = D$	
$b = 7$	2	$ab = F$	
$1 \oplus 1$	3	$ab + 1ab + 1b = DD$	
$2 * 4$	4	$4b = 4F$	
$3 - 4$	5	$ab - 1ab + 1b = DD - 4F$	
$4 \wedge 4$	6	$a - b = \sqrt{DD - 4F}$	
Weil $a + b$ Item $a - b$ bekannt sind so merck es ein drey auß meiner supradiebereit auß da in den nächstst hier vorstehenden aufstellungen die manne weiter pufferen / vertragen ligt.			
		Auf D und G.	
$a = 2$	1	$a + b = D$	
$b = 7$	2	$\frac{a}{b} = G$	
$1 - 5$	3	$a = D - b$	
$2 * 5$	4	$a = bG$	
$1 \cdot 4$	5	$D - b = bG$	
$1 - 5$	6	$D = b + bG$	
$6 \div (1 + G)$	7	$\frac{D}{1 + G} = B$	
$1 - 7$	8	$\frac{DG}{1 + G} = A N.$	

La matematica a Padova

La matematica a Padova

- L'università di Padova viene fondata nel **1222**
- Padova era allora un libero comune retto da un podestà
- **Pietro d'Abano** (Abano, c. 1257 – Padova, 1315) fu filosofo e medico



La matematica a Padova

- Pietro d'Abano insegnò astrologia a Parigi e quindi a Padova; viaggiò, fu a Costantinopoli, fu amico di Marco Polo
- Scrisse il *Conciliator Differentiarum, quæ inter Philosophos et Medicos Versantur*, trattato in cui conciliava le tesi di medici e filosofi

La matematica a Padova

- Non esisteva una cattedra di matematica autonoma, la matematica era insegnata nell'ambito dell'astrologia, che raccoglieva anche la medicina e le scienze. Pietro d'Abano, che insegnò astrologia, può dunque considerarsi il primo docente di matematica dell'università di Padova

La matematica a Padova

- Pietro d'Abano fu accusato di eresia e chiuso in carcere, dove morì in attesa del processo. Poiché fu condannato dopo morto, il suo cadavere fu poi riesumato e bruciato

La matematica a Padova

- Pietro d'Abano ispirò a Giotto gli affreschi di soggetto astrologico della Sala della Ragione (distrutti da un incendio nel 1420 e poi ricostruiti dai disegni originari).
- Questi affreschi sono divisi in tre zone orizzontali e in dodici verticali, ripartiti in oltre trecento riquadri che raffigurano il sapere astrologico del tempo, cioè l'influsso degli astri e dei cieli sulle attività umane

La matematica a Padova

- Nella seconda metà del XIV secolo insegnò astronomia, e quindi matematica, a Padova Giovanni Dondi, che nel 1364 pubblicò l'*Astrario*, un testo in cui spiega il moto degli astri e il meccanismo dell'orologio da lui costruito nel 1344. L'esemplare che sta nella torre che mette in comunicazione Piazza dei Signori con Piazza Capitanato è un rifacimento quattrocentesco e funziona ancora adesso. Per quest'opera egli prese il nome di Dondi dell'Orologio, nome che restò all'intera famiglia

La matematica a Padova



- Il rifacimento è quattrocentesco; si nota il leone di San Marco (Padova si diede a Venezia nel 1405)