

Storia della Matematica

4a settimana

La matematica nel Rinascimento

Il termine “Rinascimento”

- Il termine “Rinascimento” identifica l'arte sviluppatasi nei secoli XV e XVI; fu usato per la prima volta da Jacob Burckardt nel suo libro *La civiltà del rinascimento* (1860)

L'algebra

• Algebra retorica e algebra sincopata

- cose uguali a numero $ax = b$
- censi e cose uguali a numero $ax^2 + bx = c$
- cubo uguale a cose e numero $x^3 = ax + b$
- L'esistenza di un coefficiente veniva espresso con il plurale, l'incognita veniva espressa con “cosa”

L'algebra

Problema espresso tramite l'algebra retorica (in volgare):

Trouame 1. n°. che gioto al suo qdrat°. faccia 12

$$x + x^2 = 12$$

Di questa equazione si trovava soltanto il numero 3 e non anche il -4

L'algebra

- Altro problema espresso tramite l'algebra retorica (in latino):

- *Qdratu aeqtur 4 rebus p: 32*

$$x^2 = 4x + 32$$

Il Rinascimento

Luca Pacioli (1445-1514)

Ritratto (attribuito a Jacopo de' Barberi), Museo Capodimonte, Napoli

Pacioli sta spiegando un teorema di Euclide

Sullo sfondo un poliedro cavo di Leonardo



Il Rinascimento - Pacioli

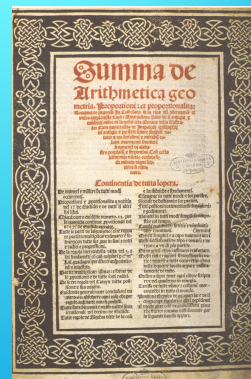
- Entrò nell'Ordine francescano nel 1470. Fu un insegnante di matematica e viaggiò molto, finché nel 1497 accettò l'invito di Ludovico il Moro a lavorare a Milano, dove collaborò con Leonardo da Vinci.

Il Rinascimento - Pacioli

- **1494:** *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (enciclopedia matematica)
- La *Summa* (pubblicata a stampa nel 1499 a Venezia) introduce la “partita doppia” con dare e avere, bilancio e inventario
- È la prima **opera enciclopedica** di carattere matematico pubblicata a stampa

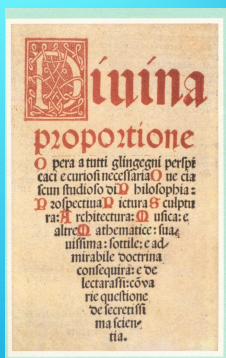
Il Rinascimento - Pacioli

- Edizione a stampa della *Summa*
- È interessante l'indice, per la terminologia



Il Rinascimento - Pacioli

- *De divina proportione* (1497) raccoglie numerose applicazioni della sezione aurea



La sezione aurea

Sezione aurea

- Dato un segmento di lunghezza a si dice che b lo divide in *sezione aurea* se vale la proporzione $a/b = b/(a-b)$
- « La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la divisione di un segmento secondo il rapporto medio ed estremo. Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d'oro, e definire il secondo una pietra preziosa. »

Keplero

Sezione aurea



- C' divide il segmento AB in sezione aurea quando
- $AB/AC' = AC'/C'B$
Se $AC' = 1$, AB è la soluzione φ (positiva!) dell'equazione
 $x^2 - x - 1 = 0$
e tale soluzione viene detta *numero aureo*

Sezione aurea

Tale soluzione risulta

$$AB = (1 + \sqrt{5})/2 \sim 1,618033989$$

Il numero aureo φ gode di varie proprietà:

$$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \sim 1,618033989$$

$$\varphi = (1 - \sqrt{5})/2 \sim -0,618033989$$

$$1/\varphi \sim 0,618033989$$

(la parte decimale è la stessa)

Sezione aurea

- Se cerchiamo una funzione che soddisfi la relazione di Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ad esempio, una esponenziale di base a , otteniamo

$$a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$$

cioè

$$a^{n-2} (a^2 - a - 1) = 0$$

Sezione aurea

- Ritroviamo quindi l'equazione che conosciamo, della quale la soluzione positiva è il numero aureo
- Inoltre, se F_n sono i valori della successione di Fibonacci, è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n = \phi$$

Sezione aurea

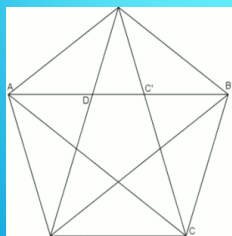
- Questa proprietà è stata scoperta probabilmente da Keplero, ma è ovvia, una volta che si sappia che il limite esiste finito e diverso da 0:

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n + F_{n-1})/F_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + F_{n-1}/F_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n-1}/F_n = \\ &= 1 + 1/x \end{aligned}$$

e questo ci riporta all'equazione già vista

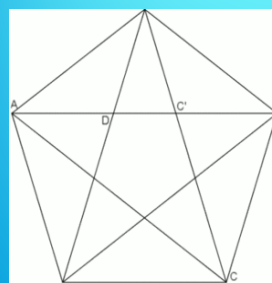
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Sezione aurea



- Il numero aureo è anche il rapporto tra la diagonale di un pentagono regolare e il suo lato

Sezione aurea



Si può notare che se si tirano le diagonali di un pentagono regolare, le loro intersezioni formano un altro pentagono regolare; iterando il procedimento si ottengono pentagoni sempre più piccoli

Sezione aurea



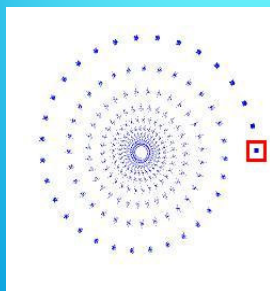
- Anche la stella a cinque punte, simbolo della Repubblica Italiana, è una stella iscritta in un pentagono regolare e costruita tramite le sue diagonali

Sezione aurea

- Pur essendoci parecchie costruzioni ancora greche con proporzioni simili alla sezione aurea, il termine “aureo” appare documentato soltanto nella prima metà dell'Ottocento

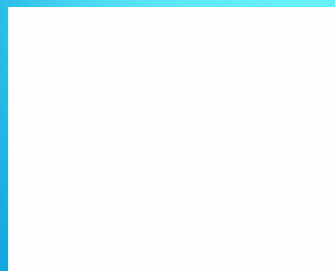


Sezione aurea



- La sezione aurea ha relazione con la spirale logaritmica, di equazione
- $\rho = a^\theta$
- oppure
- $\theta = \lg_a \rho$
- La spirale si avvolge infinite volte attorno all'origine senza raggiungerla

Spirale e sezione aurea



- Si vede come è costruita la spirale logaritmica: ogni rettangolo è tale che un lato è la sezione aurea di quello immediatamente più grande

Spirale

- Numerosi fenomeni della natura hanno forma di spirale logaritmica
- (qui è la conformazione di un uragano)



Spirale

Qui è la galassia
Mercier 51



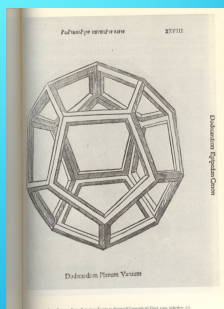
La prospettiva

La prospettiva

- **Piero della Francesca** (1415 ?- 1492)
- *De prospectiva pingendi* (scritto tra il 1472 e il 1475) propone problemi di riduzione prospettica con esercizi pratici. L'opera è la più nota ed importante tra quelle scritte dal grande artista che scrisse anche un *Libellus de quinque corporibus regularibus* ed un *Trattato d'abaco*

La prospettiva

- Il trattato *De divina proportione* (Pacioli) raccoglie anche vari disegni di Leonardo sui poliedri regolari (cavi)



La prospettiva



La prospettiva

- Tarsie di fra' Giovanni da Verona nel coro della chiesa di S. Maria in Organo a Verona (ultimo decennio del XV secolo; splendido esempio di prospettiva)



Il Cinquecento Italia e Francia

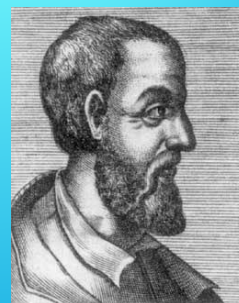
Il Cinquecento in Italia

- **Gerolamo Cardano** (1501-1576) fu una tipica figura di mago rinascimentale, versato in astrologia, magia naturale, matematica, diritto, medicina



Il Cinquecento in Italia - Cardano

- Cardano nacque a Pavia dove la madre era fuggita perché a Milano c'era la peste



Il Cinquecento in Italia - Cardano

- Cardano si laureò in arti a Venezia, quindi in medicina a Padova; trasferitosi a Milano, non fu accettato nel collegio dei medici e iniziò ad insegnare matematica, che non aveva mai studiato in corsi universitari.
- Scriveva nel frattempo trattati di medicina, sui funghi (questo rimase a lungo un testo di riferimento), sulla matematica

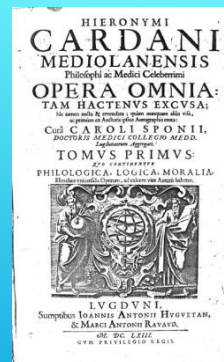
Il Cinquecento in Italia - Cardano

- Cardano scrisse un testo *De ludo aleae*, che può essere considerato il primo libro sulla probabilità
- Scrisse anche un libro sull'interpretazione dei sogni e *De vita propria*, una autobiografia scritta poco prima di morire (pubblicata largamente postuma)

Il Cinquecento in Italia - Cardano

- La sua bibliografia raccoglie oltre 150 opere
- La sua *Opera Omnia* viene pubblicata nel 1663.

Il Cinquecento in Italia - Cardano



Il Cinquecento in Italia - Cardano

- *Ars magna* (1545) è la sua opera principale e riporta, oltre a molte altre cose, la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado
- *De malo recentiorum medicorum usu libellus* (1536, medicina)
- *Practica arithmeticae et mensurandi singularis* (1539, aritmetica)
- *De immortalitate* (alchimia)
- *Opus novum de proportionibus* (meccanica)

Il Cinquecento in Italia - Cardano

- *De subtilitate rerum* (1550, fenomeni naturali)
- *De libris propriis* (1557, commentario)
- *De vita propria* (1576, autobiografia pubblicata postuma nel 1643)
- *Liber de ludo aleae* (probabilità, postumo)
In quest'ultimo sono riportati vari teoremi probabilistici la cui dimostrazione verrà secoli dopo

Il Cinquecento in Italia - Cardano

- Il **giunto cardanico** è un quadrilatero articolato spaziale
- L'invenzione di questo tipo di giunto risale al 1545. Cardano si sarebbe ispirato ad un compasso della marina fissato su due cerchi articolati. Ha descritto questa articolazione nell'opera "De subtilitate rerum"

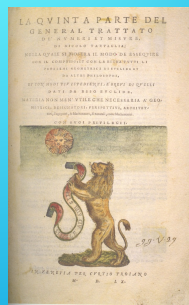
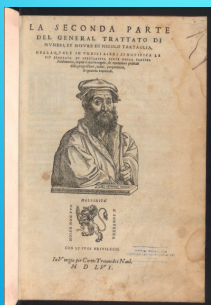
Il Cinquecento in Italia - Tartaglia

- **Nicòlò Fontana detto Tartaglia** (1500-1556) rivelò a Cardano la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado



Il Cinquecento in Italia - Tartaglia

Il General Trattato (1556)



Il Cinquecento in Italia

- **Scipione dal Ferro** (1465-1526), bolognese, scoprì la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado, pubblicata poi dal Cardano
- **Ludovico Ferrari** (1522-1565), bolognese, allievo di Cardano, scoprì la formula risolutiva delle equazioni di quarto grado

Il Cinquecento in Italia

- **Raffaele Bombelli** (1526-1573), bolognese, matematico e ingegnere idraulico
- Scrive *L'algebra*, che si arresta al terzo volume per la morte dell'autore



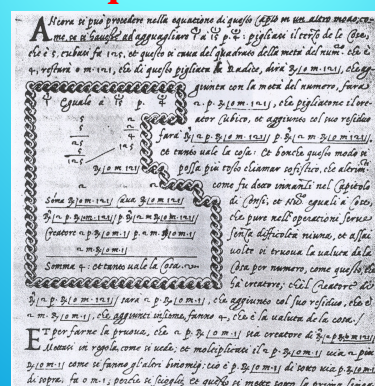
Il Cinquecento in Italia

- Bombelli risolve equazioni di terzo grado compreso il così detto "caso irriducibile", che nella formula di Cardano presenta la radice quadrata di un numero negativo. Vengono quindi prese in esame le radici immaginarie ("quantità silvestri") e i numeri complessi ("più di meno" e "meno di meno" per $+i$ e $-i$), stabilendone le regole di calcolo (addizione e moltiplicazione). Più tardi Cartesio li chiamerà *numeri immaginari*.

Il Cinquecento in Italia

- Bombelli usa per radici ed esponenti delle notazioni piuttosto originali, ma che sono molto vicine all'algebra sincopata

Il Cinquecento in Italia



Il Cinquecento in Francia

- **François Viète** (1540-1603) fu un avvocato, un politico e un matematico dilettante. Protestante, la sua vita fu influenzata dalle lotte di religione (1572, strage di San Bartolomeo)



Il Cinquecento in Francia

Nell'ostilità (a volte guerra aperta) che vide da una parte le potenze cattoliche (Filippo II di Spagna e il Papa) e dall'altra i protestanti (Elisabetta I d'Inghilterra ed Enrico di Navarra), Viète, al servizio di Enrico, decifrò messaggi cifrati spagnoli e fu accusato di magia nera. Si convertì poi al cattolicesimo, seguendo la conversione di Enrico di Navarra che, ammorbiditasi l'ostilità delle potenze cattoliche, divenne Enrico IV di Francia

Il Cinquecento in Francia

- Viète perfeziona ulteriormente l'algebra sincopata, usa le vocali come incognite e le consonanti come parametri, si occupa di trigonometria (*In artem analiticam isagoge*). Viene cimentato in una sfida nella quale risolve un'equazione di 45° grado

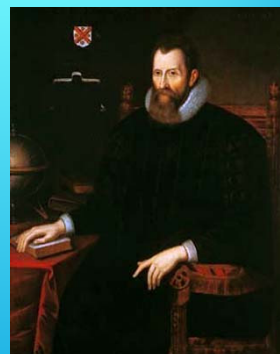
Il Cinquecento in Francia

- Viète si occupa dell'approssimazione di π portandola fino alla decima cifra decimale, utilizzando un poligono di 6×2^{16} lati; propone un algoritmo infinito (la cui convergenza non è però molto rapida) per il quale il grado di approssimazione dipende direttamente dal numero dei passi

I logaritmi

I logaritmi

- **John Napier** (1550-1617, latinizzato in Nepero) era un ricco proprietario terriero scozzese
- Non è chiaro dove abbia fatto studi di matematica (forse a Parigi)



I logaritmi

- Nepero pubblicò nel 1614 la *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi), ma aveva avuto la prima idea già nel 1594. Lo scopo era quella di semplificare i calcoli, dato che prodotti venivano trasformati in somme:

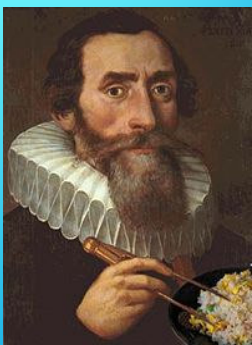
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

I logaritmi

- I primi logaritmi di Nepero erano in base $1/e$
- **Henry Briggs** (1561-1630), matematico inglese, apprese i logaritmi dall'opera di Nepero e se ne entusiasmò; subito dopo collaborò con lui e nel 1617 pubblicò una tavola dei logaritmi in base 10 degli interi fino a 10.000: *Logarithmorum Chilias Prima*

I logaritmi

- Era quella l'epoca dei calcoli astronomici:
Giovanni Keplero
- (1571-1630) è un matematico tedesco.



Keplero

- È assistente di astronomia del danese Tycho Brahe; alla morte di questo (1601) diventa astronomo imperiale. Le basi per le sue scoperte astronomiche vengono gettate nel 1609, quando pubblica *Astronomia nova*, in cui formula le sue prime due leggi.
- La terza legge compare nell'opera *Harmonices mundi* (Linz, 1619).

Keplero

- Nel 1627 pubblica le *Tavole rudolfine*, così chiamate in onore dell'imperatore Rodolfo II, un amplissimo catalogo stellare con la posizione di oltre 1000 stelle, calcolata servendosi di tavole di logaritmi da lui stesso elaborata

Cartesio

Cartesio

(René Descartes 1596 - 1650)

- Nasce in Bretagna, da famiglia di piccola nobiltà
- di salute molto cagionevole, studia in un convento di Gesuiti a La Flèche, e ha il permesso di alzarsi tardi, abitudine che manterrà tutta la vita
- Padre Marin Mersenne fu suo maestro, e tenne con lui e con altri una fitta corrispondenza

Descartes



Mersenne



Cartesio

- Si laurea in diritto, impara la danza, l'equitazione e la scherma
- Nel 1618 intraprende la carriera militare; combatte in vari eserciti, sotto Maurizio di Nassau e Massimiliano I di Baviera (guerra dei Trent'anni, 1618-1648)

Cartesio

- Una notte, 10 novembre 1619, durante una campagna militare in Germania, sogna la congruenza tra la matematica e la natura (*Scientia penitus nova*): è la prima concezione del *Discours de la Méthode*
- Dal 1620 al 1625 viaggia per mezza Europa, dall'Olanda all'Ungheria, alla Polonia; viene anche a Venezia e a Roma; prende parte all'assedio di La Rochelle (1627-28)

Cartesio



Il cardinale Richelieu



Il cardinale Richelieu all'assedio di La Rochelle

Cartesio



D'Artagnan e i tre Moschettieri (1844)

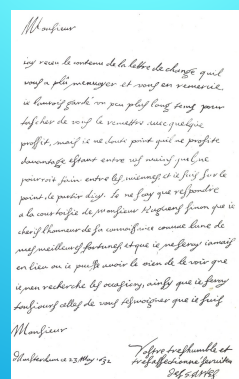


Alessandro Dumas (padre)

Cartesio

- Va a Parigi, che però non trova adatta allo sviluppo della sua filosofia
- Resta poi più di venti anni in Olanda, ma cambiando spesso città di residenza
- Conosce Christian Huygens, il cui padre, il poeta Constantine, sarà il suo potente protettore in Olanda

Cartesio



Cartesio

- Nel 1635 ha una figlia da un'avventura con una domestica; la bambina muore all'età di 5 anni; Cartesio dirà che quello è stato l'unico grande dolore della sua vita
- Nonostante il favore del Padre Mersenne, Cartesio è osteggiato da altri gesuiti (Padre Boudin); le sue teorie verranno condannate ufficialmente dalla Chiesa appoggiata dal Consiglio del Re dopo la sua morte

Cartesio

- 1637: pubblicazione del *Discours de la Méthode* (la condanna di Galileo è del 1633)

Cartesio

- 1643: stringe amicizia con la principessa Elisabetta di Boemia, con la quale ha un vivace scambio di lettere
- 1649: accetta l'invito di Cristina di Svezia, ma il ruolo di filosofo della regina non gli si confà (la deve incontrare in biblioteca ogni mattina alle cinque)
- febbraio 1650: si ammala di polmonite e muore pochi giorni più tardi

Cartesio - opere

- 1637: Esce il *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* insieme alla *Dioptrique*, *les Météores* et la *Géométrie*
- La prima frase è ben nota: *il buon senso è la cosa meglio distribuita nel mondo perché ognuno è convinto di averne più degli altri*
- Nella *Géométrie* è proposta per la prima volta la geometria analitica, gli assi cartesiani e la soluzione dei problemi geometrici tramite equazioni

Cartesio - opere

- La pubblicazione appare in francese (sarà tradotta in latino alcuni anni dopo). Infatti Cartesio intendeva rivolgersi a persone non particolarmente dotte, ma piene di buon senso (pensava anche alle donne), e sperava che la sua filosofia venisse insegnata nelle scuole

Cartesio - opere

- 1647: appare *Méditations métaphysiques*, traduzione in francese di un'opera apparsa in latino alcuni anni prima

In quest'opera appare un abbozzo della legge d'inerzia formulata da Galileo nel 1603 e che Newton riprenderà mezzo secolo dopo

In quest'opera appare la frase: *cogito, ergo sum*

Cartesio - opere

- Tra le opere va considerato il vasto epistolario, particolarmente curato e che gli permette di restare in contatto con i dotti francesi durante il suo lungo soggiorno in Olanda. In gran parte le lettere sono scritte a P. Mersenne, ma ce ne sono anche per la Regina di Svezia, la principessa Elisabetta di Boemia e Fermat

Cartesio - opere

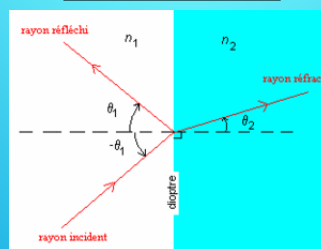
- In una lettera a Constantin Huygens tratta la teoria delle macchine semplici:
- la *puleggia*, il *piano inclinato*, il *cuneo*, l'*argano*, la *vite* e la *leva*

Cartesio - opere

- Cartesio fu un sostenitore della teoria corpuscolare della luce, fece studi sulla riflessione e sulla rifrazione, con illustrazioni nei suoi testi
- Nel suo *Secondo discorso* tratta della rifrazione e ne enuncia il teorema dei seni, che adesso esprimiamo come un rapporto tra gli indici di rifrazione

Cartesio - opere

Legge di Snell-Cartesio



$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

Cartesio - opere (Snell)

- **Willebrord Snell van Royen (Snellius)** (1580-1626), fisico e matematico olandese



Cartesio - opere

- Nel suo primo periodo (durante le campagne militari) scopre la formula

$$f + v = s + 2$$

che poi prenderà il nome di **formula di Eulero**

In una lettera del 1628 Cartesio dice di aver trovato per via geometrica la costruzione delle radici di terzo e quarto grado tramite una parabola

Cartesio - opere

- Naturalmente non era più di quanto la matematica greca aveva scoperto 2000 anni prima e di quanto Omar Kyyam aveva già disegnato attorno al 1100

Ma probabilmente è di quegli anni la applicazione ad alcuni problemi classici della geometria analitica

Cartesio - opere

- In realtà nei *Discours* si trovano più costruzioni geometriche che non l'uso dell'algebra applicata a problemi di geometria
- Tuttavia Cartesio si differenzia dai predecessori per la sistematicità dell'applicazione dei suoi metodi

Cartesio - opere

- Cartesio usa le prime lettere per i parametri, le ultime per le incognite, usa i simboli + e - di derivazione tedesca
- Rottura con la tradizione greca: Cartesio considera anche x^2 , x^3 come segmenti, non come quadrati o cubi
- Il testo di Cartesio si può leggere senza difficoltà anche adesso

Cartesio - opere

- La duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, problemi classici dell'antichità, conducono ad equazioni di terzo grado
- Cartesio dimostra (inadeguatamente) che queste equazioni non si possono risolvere con riga e compasso. Nelle sue risoluzioni di problemi di secondo grado scarta sempre le radici negative

Cartesio - opere

- **Curve rettificabili e curve meccaniche**

Curve *rettificabili*: tali che si può calcolare la loro lunghezza tramite un'equazione algebrica a coefficienti interi (la definizione odierna è diversa e usa l'integrale)

Le curve *meccaniche* erano curve ottenibile con movimento e tra queste i greci avevano individuato la conchoide, la cissoide, la quadratrice e la spirale

Cartesio - opere

- Cartesio distingue le curve (che oggi chiamiamo **algebriche**) come la *cissoide* e la *conchoide* dalle altre (che oggi chiamiamo **trascendenti**), come la *quadratrice* e la *spirale*
- Le curve algebriche sono quelle la cui equazione è algebrica

Cartesio - opere

- Si chiamano **equazioni algebriche** o **polinomiali** quelle equazioni equivalenti ad un polinomio uguagliato a zero (oppure riconducibili a queste tramite trasformazioni, in cui compaiono soltanto somme, prodotti, divisioni, potenze, radici). Il grado di tale polinomio è anche il grado dell'equazione
- Equazioni **trascendenti**: le altre

Cartesio - opere

1638: Cartesio si imbatte in una curva meccanica nello studio della caduta di un grave che entra nella Terra in rotazione:

$$\rho = ae^{b\theta} \text{ (spirale logaritmica)}$$

Cartesio rifiuta queste curve, che invece risultano rettificabili

Torricelli dimostrerà (1645) che la lunghezza della spirale si può ottenere geometricamente

Cartesio - opere

Il Libro III dei *Discours* è un corso di teoria elementare delle equazioni (determinate); sono descritti metodi per risolvere vari problemi, ad es.:

come trovare **radici razionali**

come **abbassare l'ordine di un'equazione** quando se ne conosce una radice

come **eliminare il secondo termine** con artifici

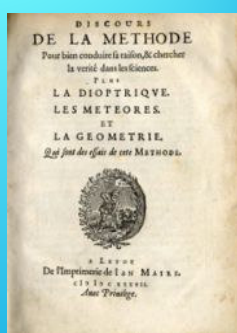
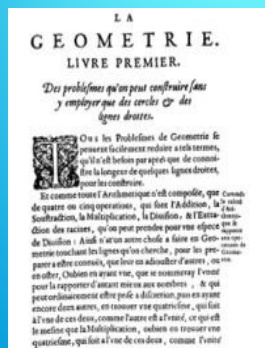
come **determinare le radici vere e false** (cioè quelle negative: **regola di Cartesio**)

come trovare le **radici di equazioni di terzo e quarto grado**

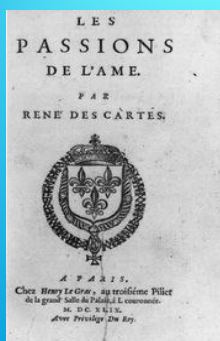
Cartesio - opere

- Cartesio usa indifferentemente *coordinate ortogonali e coordinate oblique*
- è un calcolatore di grande abilità, anche se fondamentalmente non è un matematico
- la sua geometria non è proposta con effetti pratici, ma è un'opera astratta come quelle dei greci

Cartesio - opere



Cartesio - opere



- Cartesio scrive anche di morale, anche se rifiuta di scriverne esplicitamente; le sue teorie sulla morale si trovano maggiormente nelle sue lettere