

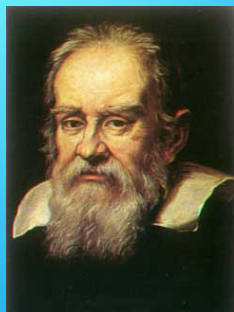
Storia della Matematica

5a settimana

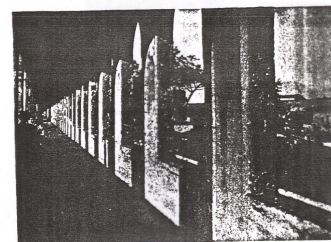
Galileo

Galileo Galilei

- **Galileo Galilei** (1564-1642), figlio di un medico, trascorse l'infanzia tra Pisa e Firenze e iniziò a studiare medicina a Pisa, senza entusiasmo



Galileo

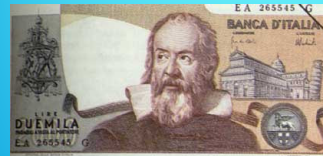


CASA NATALE DI GALILEO IN PISA
(La chiostra di cui parla l'atto di locazione a Vincenzo Galilei, padre di Galileo).

Galileo

- Galileo rinuncia alla medicina, si laurea in matematica e comincia a scrivere opere scientifiche (*De motu*) e a vivere di lezioni private. Insegna quindi all'università di Pisa e nel 1592 viene chiamato a Padova con uno stipendio molto consistente. Vi rimane fino al 1610, vivendo "i migliori anni della sua vita".

Galileo



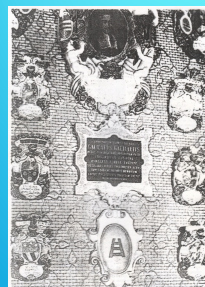
- Nello studio della matematica il suo maestro Ostilio Ricci, già allievo di Tartaglia, gli fece studiare le traduzioni di Archimede e di Euclide fatte da Tartaglia

Galileo



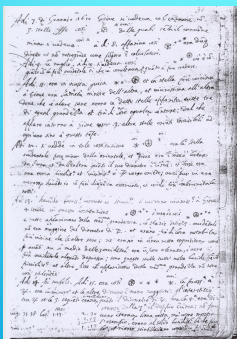
1592 - 1610

Galileo



- Blasone di Galileo nella volta del Cortile Antico (Università di Padova)

Galileo



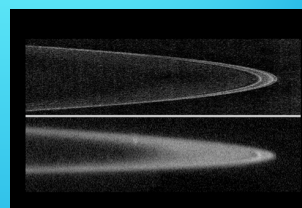
- Osservazioni di Galileo sui satelliti di Giove. Il *Sidereus nuncius* viene pubblicato nel 1610

Galileo

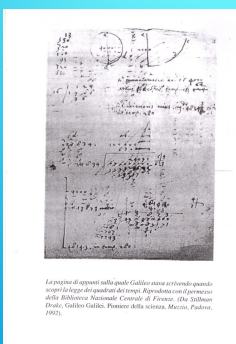
Foto del Voyager (1979)



Foto del New Horizons (2007)



Galileo



- Foglio con calcoli riguardanti la terza legge di Keplero

Galileo

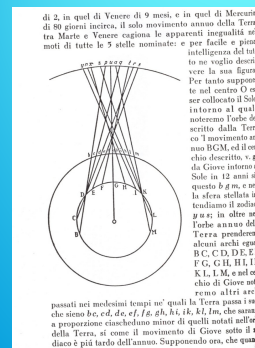
- Galileo scrive il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), in cui si proclama copernicano; le sue teorie saranno in seguito condannate dalla Chiesa, e Galileo dovrà abiurare, ma sarà comunque condannato al confino.
- In quest'opera definisce chiaramente la *proporzione* come un'uguaglianza tra due rapporti

Galileo



Due diverse edizioni del "Dialogo" (prima e dopo la condanna)

Galileo



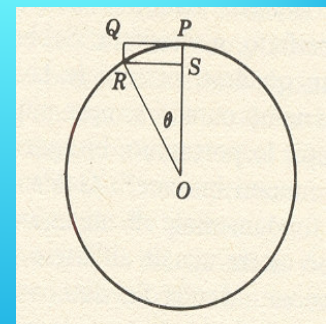
- Edizione moderna del "Dialogo sui massimi sistemi". I dialoganti sono Salviati, Sagredo e Simplicio

Galileo

- Galileo spesso si trovò a considerare quantità sia infinitamente grandi che infinitamente piccole. Sulle prime scrisse che le relazioni di uguale e maggiore possono dirsi solo tra quantità finite (invece due secoli dopo si distingueranno diversi ordini di infinito). Sulle seconde è interessante una considerazione matematica intesa a far capire a Simplicio il fenomeno della gravità

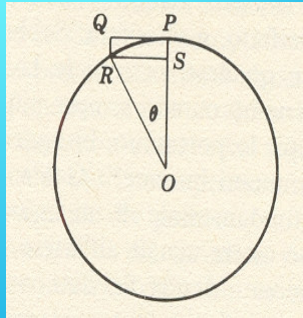
Galileo

- Simplicio osserva che un oggetto verrebbe lanciato via per effetto della rotazione della Terra



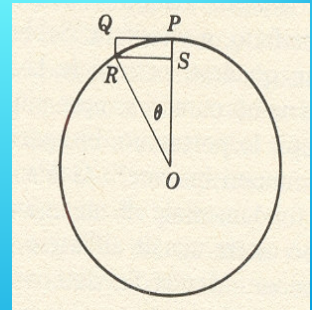
Galileo

- Salviati però osserva che la distanza QR che l'oggetto deve percorrere per rimanere sulla Terra mentre questa ruota di un angolo θ molto piccolo è infinitamente piccola rispetto alla distanza lungo la tangente PQ che l'oggetto deve percorrere orizzontalmente

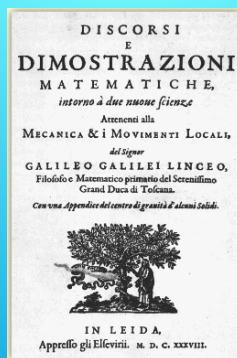


Galileo

- Questo equivale a dire che $QR = PS$ è un infinitesimo di ordine superiore sia rispetto ad RS che rispetto all'arco $x = PR$; posto $OP=1$ è $PS = 1 - \cos x$ che è un infinitesimo del 2° ordine rispetto all'arco x , mentre il suo seno RS è del 1°



Galileo



Galileo

- Galileo applica fortemente la teoria della proporzioni allo studio del moto
- Fa inoltre uso dei concetti di infinitamente grande e infinitamente piccolo nella sua teoria delle forze ed utilizza il grafico triangolare di Oresme per esprimere le velocità

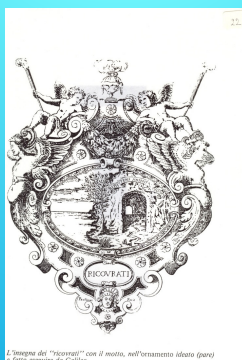
Galileo

- Studia il moto dei proiettili dividendolo in due componenti, una orizzontale, uniforme, e una verticale, uniformemente accelerata;
- scopre quindi che la loro composizione, se si trascura la resistenza dell'aria, è una parabola

Galileo

- Galileo studia anche la brachistocrona, ma erroneamente crede che la brachistocrona tra due punti sia un arco di circonferenza, invece che un arco di cicloide;
- inoltre crede che la posizione di riposo di una catena pesante sottoposta alla gravità sia una parabola: è invece una catenaria (*coseno iperbolico*)

Galileo



La tomba del "ricercatore" con il musco, nell'armamento ideato (parco)
e fatto erigere da Galileo.

Allievi di Galileo

Cavalieri

- **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) fu allievo di Galileo a Pisa.
- Entrò giovane nell'ordine ecclesiastico dei gesuati (non: gesuiti) e si occupò del calcolo di aree e volumi



Cavalieri

- Secondo Cavalieri una superficie piana è costituita da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e un solido è composto da un numero indefinito di superfici piane parallele; questi elementi (le loro misure) sono detti rispettivamente **indivisibili** di area e di volume. La sua opera principale è *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635)

Cavalieri

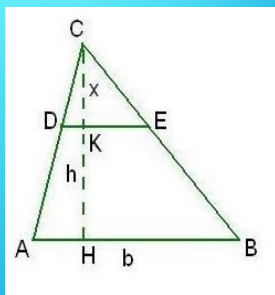
- **Principio di Cavalieri** (per i poligoni):
- *Se due poligoni hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da rette parallele alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche le aree dei poligoni staranno in questo rapporto*
- (estensibile, con un adattamento del linguaggio, a figure piane qualsiasi)

Cavalieri

- **Principio di Cavalieri** (per i solidi):
- *Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto*

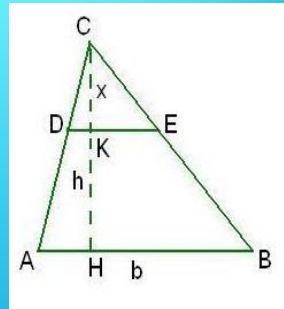
Cavalieri

- Consideriamo il triangolo ABC: un **indivisibile** è una corda parallela alla base, distante x dal vertice, la cui misura è una funzione di x , che chiamiamo $f(x)$.
- Per la similitudine dei triangoli ACB e DCE si ha $b:h=f(x):x$



Cavalieri

- Si ottiene:
 $f(x) = x \cdot b / h$
- L'area dell'indivisibile di altezza dx diventa:
 $f(x) \cdot dx$; quindi l'area di ABC è la somma delle aree degli indivisibili al variare di x da 0 a h :
 $\int_0^h f(x) dx$



Cavalieri

- Dato che l'area del triangolo è nota e vale $\frac{1}{2} b h$

- si desume che è

$$\int_0^h x dx = \frac{1}{2} h^2$$

In tale modo possiamo attribuire a Cavalieri il calcolo di un primo integrale elementare

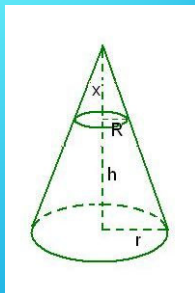
Cavalieri

- Con lo stesso principio applicato ai solidi Cavalieri troverà il volume del cono (che è un terzo del volume del cilindro di uguale base e uguale altezza) e il volume della sfera (che è i due terzi del volume del cilindro circoscritto di uguale altezza)
- Con Cavalieri abbiamo una prima idea del calcolo integrale

Cavalieri



Monumento a Cavalieri a Milano



Cavalieri

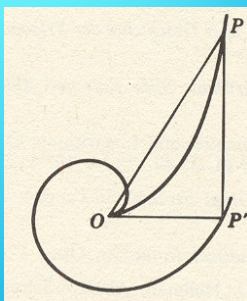
- Cavalieri generalizza questo integrale per le potenze superiori, trovando per via geometrica la formula che analiticamente si scriverebbe come a lato

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Cavalieri

- Cavalieri si occupa anche di curve “meccaniche”: se si prende una parabola metallica e la si torce come se fosse una molla tenendone fissa un'estremità si ottiene una spirale di Archimede:

$$\rho = a\theta$$



Torricelli

- Evangelista Torricelli** (1608-1647), di Faenza, studiò a Roma; si presentò a Galileo nel 1632 con una lettera ancora conservata; alla morte di Galileo gli succederà all'università di Firenze

Torricelli



Torricelli

- Torricelli studiò la quadratura della parabola, proponendone ben 21 dimostrazioni usando sia il metodo degli indivisibili che il metodo di esaustione
- Scopri anche, nella geometria solida, che un solido di rotazione di una figura che ha area infinita può avere invece volume finito (probabilmente anticipato in questo da Fermat)

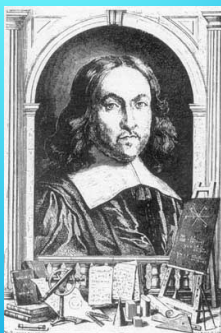
Torricelli

- A Torricelli si deve una prima intuizione del teorema che lega l'integrale definito alla primitiva di una funzione continua (teorema di Torricelli-Barrow)

Fermat

Fermat

- **Pierre de Fermat** (1601-1665) studiò diritto a Tolosa; fu giureconsulto nel parlamento di quella città



Fermat

- 1629: ha l'incarico di ricostruire i *Luoghi piani* di Apollonio sulla base delle citazioni contenute nella *Collezione matematica* di Pappo



Fermat

- 1636: principio fondamentale della geometria analitica:
ogniqualevolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva
- Fermat si occupa principalmente delle **equazioni indeterminate**

Fermat - opere

- *Ad locos planos et solidos isagoge*
- Fermat parte da un'equazione lineare e sceglie un sistema di coordinate arbitrario in cui rappresentarla
- **equazioni lineari:**

$$D \text{ in } A \text{ æquetur } B \text{ in } E$$

$$Dx = By$$

L'immagine era una semiretta spiccata dall'origine nel primo quadrante (non erano considerati i numeri negativi)

Fermat - opere

- Considera una curva di equazione

$$y = x^n$$

e ne vuole trovare l'area compresa tra le rette $x=0$ ed $x=a$.

Suddivide l'intervallo $[0, a]$ in un numero infinito di sottointervalli nelle ascisse $a, aE, aE^2, aE^3, \dots$ con $E < 1$.

Fermat - opere

- Le aree dei successivi rettangoli (tutti circoscritti), a cominciare dal più grande, avevano area data dalla progressione geometrica

$$a^n(a-aE), a^nE^n(aE-aE^2), a^nE^{2n}(aE^2-aE^3), \dots$$

- La somma all'infinito di questi termini risulta

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\dots+E^n}$$

Fermat - opere

- Con il tendere di E a 1 (man mano che i rettangoli diventano sempre più stretti) la somma delle loro aree si avvicina all'area della superficie sottostante alla curva.

- Ponendo $E=1$ si ottiene

$$a^{n+1}/(n+1)$$

che è il risultato esatto.

- Questo risultato risulta valido anche con valori frazionari di n .

Fermat - opere

- Ovviamente, per ottenere l'integrale tra a e b basta fare l'integrale tra 0 e b e sottrarre quello da 0 ad a .
- Anche per valori negativi di n Fermat usava lo stesso metodo, solo prendeva $E > 1$ e lo faceva tendere ad 1. Egli trovava in questo caso il valore dell'integrale generalizzato da a all'infinito oppure da b all'infinito e sottraendo l'uno dall'altro trovava l'integrale tra a e b .

Fermat - opere

- Questo procedimento si rivelò inapplicabile per $n=-1$, ancorché esso fosse già stato risolto da un gesuita fiammingo precedente a Fermat, Gregorio di San Vincenzo (1584-1667).
- Questi aveva notato che se si prendevano sull'iperbole $xy=1$ dei punti e se ne conduceva la perpendicolare all'asse delle x

Fermat - opere

- in modo tale che gli intervalli che ne conseguivano fossero in proporzione geometrica, l'area risultava crescere in proporzione aritmetica. Quindi ad un prodotto corrispondeva una somma, e quindi l'area compresa tra le parallele all'asse y passanti per a e b , l'asse x e l'iperbole valeva

$$\lg b - \lg a$$

Fermat - opere

- Può sembrare strano che Fermat non si sia accorto, calcolando tangenti a parabole e iperboli e aree sottostanti ai grafici di tali funzioni che il calcolo delle aree era l'operazione inversa della determinazione delle tangenti.
- Peraltro già Cartesio aveva affrontato problemi di questo tipo, che gli aveva proposto padre Mersenne (problemi **inversi della tangente**)

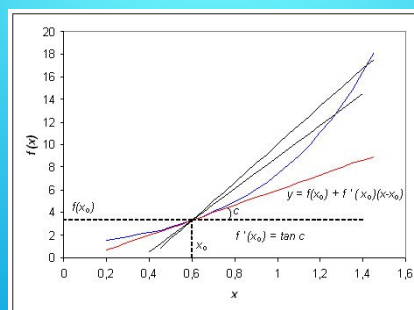
Fermat - opere

- Di fatto non faceva altro che fare quello che adesso chiameremmo il **limite del rapporto incrementale**, e uguagliarlo a 0
- Fermat non conosceva il concetto di limite, ma andava a cercare dove il rapporto incrementale si avvicinava allo 0.
- Fermat quindi è il **primo ideatore del calcolo differenziale**, oltre che il creatore, insieme a Cartesio, della geometria analitica

Fermat - opere

- Fermat trovò anche che il coefficiente angolare della tangente ad una curva (algebrica) era il rapporto incrementale tra due punti vicini, che poi veniva assimilato allo 0.

Fermat - opere



Fermat - opere

$$ax+by=c^2$$

(il quadrato è per mantenere l'omogeneità)
era rappresentato da un segmento della retta
nel primo quadrante compreso tra gli assi
coordinati

Fermat - opere

- All'iperbole

$$xy=k^2$$

viene ricondotta l'equazione generica

$$xy+a^2=bx+cy$$

mediante una traslazione d'assi del sistema
di coordinate

Fermat - opere

- La conica degenera

$$x^2 = y^2$$

era una sola semiretta nel I quadrante, e a questa forma Fermat riduceva le equazioni omogenee di 2° grado

- La parabola

$$a^2 \pm x^2 = by$$

- Il cerchio

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$$

Fermat - opere

- L'iperbole

$$a^2 - x^2 = ky^2$$

Inoltre Fermat sa applicare trasformazioni per ridurre le coniche a **forma canonica**

- Poiché la *Isagoge* fu pubblicata dopo la morte di Fermat (1665), la geometria analitica è stata attribuita a Cartesio, ma l'opera di Fermat circolava già da tempo negli ambienti dotti

Fermat - opere

- 1629: *Metodo per trovare i massimi e i minimi* (pubblicato dopo la morte)

- Fermat aveva considerato i luoghi geometrici del tipo

$$y = x^n$$

$n > 0$: parabole di Fermat;

$n < 0$: iperboli di Fermat

(sono curve di ordine anche superiore al 4°)

Fermat - opere

- Metodo per determinare i massimi e minimi delle curve algebriche $f(x)$

- Calcola

$$f(x+E) - f(x)$$

e nota che nei punti di massimo e di minimo quella differenza è quasi 0. Anzi, più piccolo è E e più si avvicina a 0. Allora divide per E e pone $E = 0 \dots (0/0)$

Fermat - opere

- Può sembrare strano che Fermat non si sia accorto, calcolando tangenti a parabole e iperboli e aree sottostanti ai grafici di tali funzioni che il calcolo delle aree era l'operazione inversa della determinazione delle tangenti.
- Peraltro già Cartesio aveva affrontato problemi di questo tipo, che gli aveva proposto padre Mersenne (problemi **inversi della tangente**)

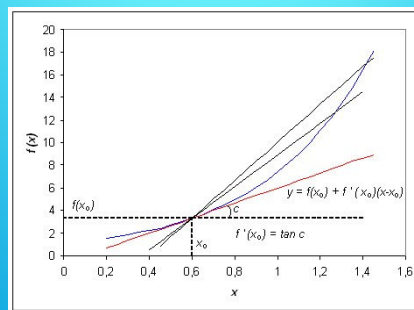
Fermat - opere

- Di fatto non faceva altro che fare quello che adesso chiameremmo il **limite del rapporto incrementale**, e uguagliarlo a 0
- Fermat non conosceva il concetto di limite, ma andava a cercare dove il rapporto incrementale si avvicinava allo 0.
- Fermat quindi è il **primo ideatore del calcolo differenziale**, oltre che il creatore, insieme a Cartesio, della geometria analitica

Fermat - opere

- Fermat trovò anche che il coefficiente angolare della tangente ad una curva (algebrica) era il rapporto incrementale tra due punti vicini, che poi veniva assimilato allo 0.

Fermat - opere



Fermat - opere

$$ax+by=c^2$$

(il quadrato è per mantenere l'omogeneità)
era rappresentato da un segmento della retta
nel primo quadrante compreso tra gli assi
coordinati

Fermat - opere

- All'iperbole

$$xy=k^2$$

viene ricondotta l'equazione generica

$$xy+a^2=bx+cy$$

mediante una traslazione d'assi del sistema
di coordinate

Fermat - opere

- La conica degenera

$$x^2=y^2$$

era una sola semiretta nel I quadrante, e a
questa forma Fermat riduceva le equazioni
omogenee di 2° grado

- La parabola

$$a^2 \pm x^2 = by$$

- Il cerchio

$$x^2+y^2+2ax+2by=c^2$$

Fermat - opere

- L'iperbole

$$a^2 - x^2 = ky^2$$

Inoltre Fermat sa applicare trasformazioni
per ridurre le coniche a **forma canonica**

- Poiché la *Isagoge* fu pubblicata dopo la
morte di Fermat (1665), la geometria
analitica è stata attribuita a Cartesio, ma
l'opera di Fermat circolava già da tempo
negli ambienti dotti

Fermat - opere

- 1629: *Metodo per trovare i massimi e i minimi* (pubblicato dopo la morte)
- Fermat aveva considerato i luoghi geometrici del tipo

$$y=x^n$$

$n > 0$: *parabole di Fermat*;

$n < 0$: *iperboli di Fermat*

(sono curve di ordine anche superiore al 4°)

Fermat - opere

- Metodo per determinare i massimi e minimi delle curve algebriche $f(x)$
- Calcola

$$f(x+E) - f(x)$$

e nota che nei punti di massimo e di minimo quella differenza è quasi 0. Anzi, più piccolo è E e più si avvicina a 0. Allora divide per E e pone $E = 0 \dots (0/0)$