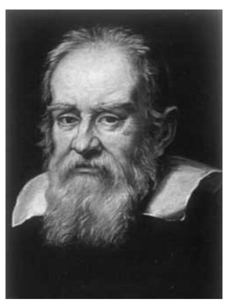
Storia della Matematica

5a settimana

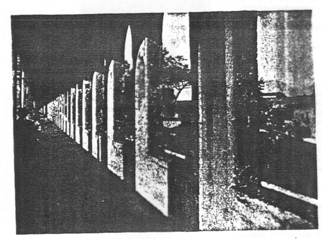
Galileo

Galileo Galilei

- **Galileo Galilei** (1564-1642), figlio di un medico, trascorse l'infanzia tra Pisa e Firenze e iniziò a studiare medicina a Pisa, senza entusiasmo



Galileo



CASA NATALE DI GALILEO IN PISA
(La chiostra di cui parla l'atto di locazione a Vincenzo Galilei, padre di Galileo).

Galileo

- Galileo rinuncia alla medicina, si laurea in matematica e comincia a scrivere opere scientifiche (*De motu*) e a vivere di lezioni private. Insegna quindi all'università di Pisa e nel 1592 viene chiamato a Padova con uno stipendio molto consistente. Vi rimane fino al 1610, vivendo "i migliori anni della sua vita".

Galileo

- Nello studio della matematica il suo maestro Ostilio Ricci, già allievo di Tartaglia, gli fece studiare le traduzioni di Archimede e di Euclide fatte da Tartaglia

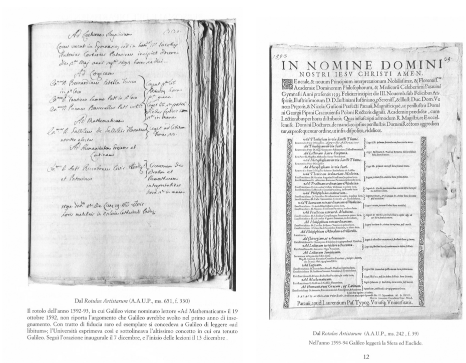
Galileo

1592 - 1610

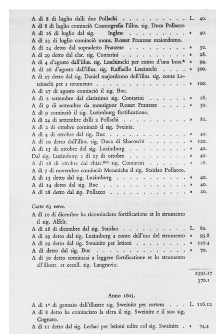
Galileo

- Blasone di Galileo nella volta del Cortile Antico (Università di Padova)

Galileo



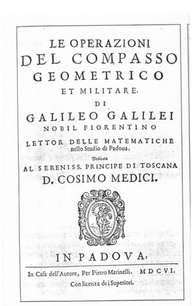
Galileo



- Conti di Galileo:

  sono riportate le entrate e le rispettive motivazioni

Galileo

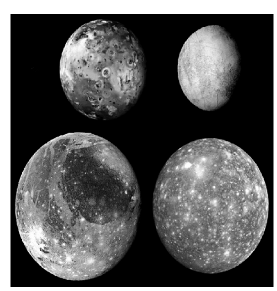


LE OPERAZIONI
DEL COMPASSO
GEOMETRICO
ET MILITARE
DI
GALILEO GALILEI
NOBIL FIORENTINO
LETTOR DELLE MATEMATICHE
nello Studio di Padoua.
Dedicate
AL SERENISS. PRINCIPE DI TOSCANA
D. COSIMO MEDICI.
IN PADOVA,
In Casa dell'Autore, Per Pietro Marinelli. M D C V I.
Con licenza de i Superiori.

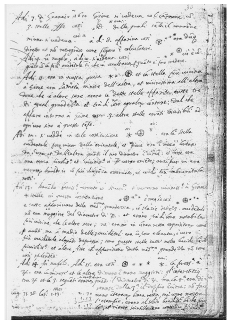
- Operazioni matematiche su uno strumento di applicazione militare

Galileo

- Nel 1609 Galileo scopre i quattro maggiori satelliti di Giove (Io, Callisto, Ganimede, Europa) che chiamerà "lune medicee". Attualmente sono noti almeno 60 satelliti e un sistema di anelli



Galileo

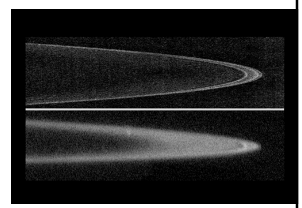


- Osservazioni di Galileo sui satelliti di Giove. Il *Sidereus nuncius* viene pubblicato nel 1610

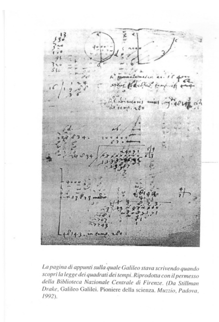
Galileo

Foto del Voyager (1979)

Foto del New Horizons (2007)



Galileo

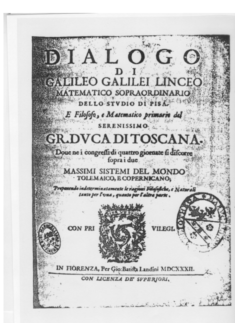


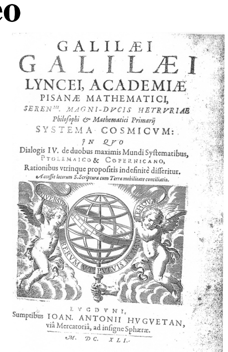
- Foglio con calcoli riguardanti la terza legge di Keplero

Galileo

- Galileo scrive il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), in cui si proclama copernicano; le sue teorie saranno in seguito condannate dalla Chiesa, e Galileo dovrà abiurare, ma sarà comunque condannato al confino.
- In quest'opera definisce chiaramente la *proporzione* come un'*uguaglianza tra due rapporti*

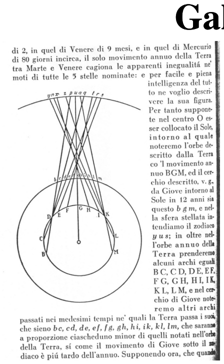
Galileo





Due diverse edizioni del "Dialogo" (prima e dopo la condanna)

Galileo



di 2, in quel di Venere di 9 mesi, e in quel di Mercurio di 80 giorni incirca, il solo movimento annuo della Terra tra Marte e Venere cagiona le apparenti inegualitá ne' moti di tutte le 5 stelle nominate: e per facile e piena intelligenza del tutto ne voglio descrivere la sua figura. Per tanto supponete nel centro O esser collocato il Sole, intorno al quale noteremo l'orbe descritto dalla Terra co 'l movimento annuo BGM, ed il cerchio descritto, v. g., da Giove intorno al Sole in 12 anni sia questo *b g m*, e nella sfera stellata intendiamo il zodiaco *y u s*; in oltre nell'orbe annuo della Terra prenderemo alcuni archi eguali BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IK, KL, LM, e nel cerchio di Giove noteremo altri archi passati nei medesimi tempi ne' quali la Terra passa i suoi, che sieno *bc, cd, de, ef, fg, gh, hi, ik, kl, lm,* che saranno a proporzione ciascheduno minor di quelli notati nell'orbe della Terra, sí come il movimento di Giove sotto il zodiaco è piú tardo dell'annuo. Supponendo ora, che quando

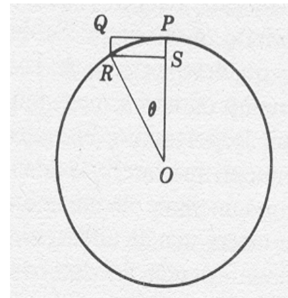
- Edizione moderna del "Dialogo sui massimi sistemi". I dialoganti sono Salviati, Sagredo e Simplicio

Galileo

- Galileo spesso si trovò a considerare quantità sia infinitamente grandi che infinitamente piccole. Sulle prime scrisse che le relazioni di uguale e maggiore possono dirsi solo tra quantità finite (invece due secoli dopo si distingueranno diversi ordini di infinito). Sulle seconde è interessante una considerazione matematica intesa a far capire a Simplicio il fenomeno della gravità

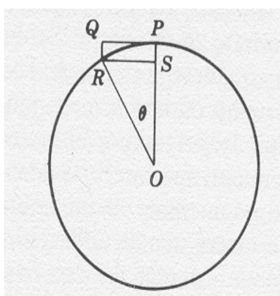
Galileo

- Simplicio osserva che un oggetto verrebbe lanciato via per effetto della rotazione della Terra



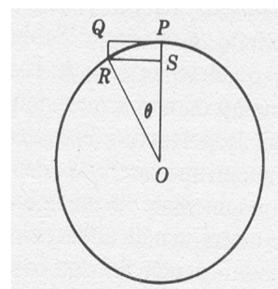
Galileo

- Salviati però osserva che la distanza QR che l'oggetto deve percorrere per rimanere sulla Terra mentre questa ruota di un angolo θ molto piccolo è infinitamente piccola rispetto alla distanza lungo la tangente PQ che l'oggetto deve percorrere orizzontalmente



Galileo

- Questo equivale a dire che QR = PS è un infinitesimo di ordine superiore sia rispetto ad RS che rispetto all'arco x = PR; posto OP=1 è PS = 1- cos x che è un infinitesimo del 2° ordine rispetto all'arco x, mentre il suo seno RS è del 1°



Galileo


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Galileo

- Galileo applica fortemente la teoria della proporzioni allo studio del moto
- Fa inoltre uso dei concetti di infinitamente grande e infinitamente piccolo nella sua teoria delle forze ed utilizza il grafico triangolare di Oresme per esprimere le velocità

Galileo

- Studia il moto dei proiettili dividendolo in due componenti, una orizzontale, uniforme, e una verticale, uniformemente accelerata;
- scopre quindi che la loro composizione, se si trascura la resistenza dell'aria, è una parabola

Galileo

- Galileo studia anche la brachistocrona, ma erroneamente crede che la brachistocrona tra due punti sia un arco di circonferenza, invece che un arco di cicloide;
- inoltre crede che la posizione di riposo di una catena pesante sottoposta alla gravità sia una parabola: è invece una catenaria (*coseno iperbolico*)

Galileo

L'insegna dei "ricovrati" con il motto, nell'ornamento ideato (pare) e fatto eseguire da Galileo.

Allievi di Galileo

Cavalieri

- **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) fu allievo di Galileo a Pisa.
- Entrò giovane nell'ordine ecclesiastico dei gesuati (non: gesuiti) e si occupò del calcolo di aree e volumi

Cavalieri

- Secondo Cavalieri una superficie piana è costituita da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e un solido è composto da un numero indefinito di superfici piane parallele; questi elementi (le loro misure) sono detti rispettivamente **indivisibili** di area e di volume. La sua opera principale è *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635)

Cavalieri

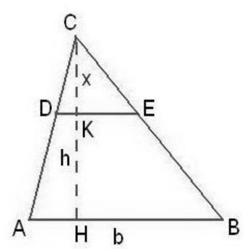
- **Principio di Cavalieri** (per i poligoni):
- *Se due poligoni hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da rette parallele alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche le aree dei poligoni staranno in questo rapporto*
- (estensibile, con un adattamento del linguaggio, a figure piane qualsiasi)

Cavalieri

- **Principio di Cavalieri** (per i solidi):
- *Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto*

Cavalieri

- Consideriamo il triangolo ABC: un **indivisibile** è una corda parallela alla base, distante x dal vertice, la cui misura è una funzione di x, che chiamiamo f(x).
- Per la similitudine dei triangoli ACB e DCE si ha b:h=f(x):x



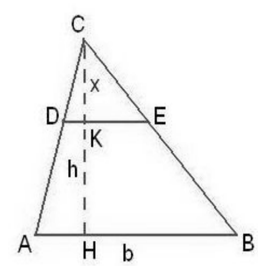
Cavalieri

- Si ottiene:

  $f(x) = x \cdot b / h$
- L'area dell'indivisibile di altezza dx diventa:

  $f(x) \cdot dx$; quindi l'area di ABC è la somma delle aree degli indi-visibili al variare di x da 0 a h:

  $\int_0^h f(x)\, dx$



Cavalieri

- Dato che l'area del triangolo è nota e vale

  $\frac{1}{2}\, b\, h$
- si desume che è

  $\int_0^h x\, dx = \frac{1}{2} h^2$

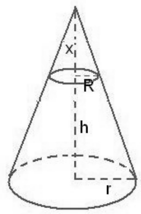
  In tale modo possiamo attribuire a Cavalieri il calcolo di un primo integrale elementare

Cavalieri

- Con lo stesso principio applicato ai solidi Cavalieri troverà il volume del cono (che è un terzo del volume del cilindro di uguale base e uguale altezza) e il volume della sfera (che è i due terzi del volume del cilindro circoscritto di uguale altezza)
- Con Cavalieri abbiamo una prima idea del calcolo integrale

Cavalieri

Monumento a Cavalieri a Milano



Cavalieri

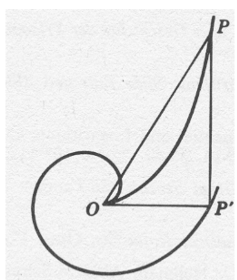
- Cavalieri generalizza questo integrale per le potenze superiori, trovando per via geometrica la formula che analiticamente si scriverebbe come a lato

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Cavalieri

- Cavalieri si occupa anche di curve “meccaniche”: se si prende una parabola metallica e la si torce come se fosse una molla tenendone fissa un’estremità si ottiene una spirale di Archimede:

  $\rho = a\theta$



Torricelli

- **Evangelista Torricelli** (1608-1647), di Faenza, studiò a Roma; si presentò a Galileo nel 1632 con una lettera ancora conservata; alla morte di Galileo gli succederà all’università di Firenze

Torricelli

Torricelli

- Torricelli studiò la quadratura della parabola, proponendone ben 21 dimostrazioni usando sia il metodo degli indivisibili che il metodo di esaustione
- Scoprì anche, nella geometria solida, che un solido di rotazione di una figura che ha area infinita può avere invece volume finito (probabilmente anticipato in questo da Fermat)

Torricelli

- A Torricelli si deve una prima intuizione del teorema che lega l'integrale definito alla primitiva di una funzione continua (teorema di Torricelli-Barrow)

Fermat

Fermat

- **Pierre de Fermat** (1601-1665) studiò diritto a Tolosa; fu giureconsulto nel parlamento di quella città

Fermat

- 1629: ha l'incarico di ricostruire i *Luoghi piani* di Apollonio sulla base delle citazioni contenute nella *Collezione matematica* di Pappo

Fermat

- 1636: principio fondamentale della geometria analitica:

  ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un ***luogo****, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva*
- Fermat si occupa principalmente delle **equazioni indeterminate**

Fermat - opere

- *Ad locos planos et solidos isagoge*
- Fermat parte da un'equazione lineare e sceglie un sistema di coordinate arbitrario in cui rappresentarla
- **equazioni lineari**:

  D in A æquetur B in E

  $Dx = By$

  L'immagine era una semiretta spiccata dall'origine nel primo quadrante (non erano considerati i numeri negativi)

Fermat - opere

- Considera una curva di equazione

  $y = x^n$

  e ne vuole trovare l'area compresa tra le rette x=0 ed x=a.

  Suddivide l'intervallo [0, a] in un numero infinito di sottointervalli nelle ascisse a, aE, aE^2 , aE^3 , … con E<1.

Fermat - opere

- Le aree dei successivi rettangoli (tutti circoscritti), a cominciare dal più grande, avevano area data dalla progressione geometrica

  $a^n(a-aE), a^nE^n(aE-aE^2), a^nE^{2n}(aE^2-aE^3), \ldots$

- La somma all'infinito di questi termini risulta

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\ldots+E^n}$$

Fermat - opere

- Con il tendere di *E* a 1 (man mano che i rettangoli diventano sempre più stretti) la somma delle loro aree si avvicina all'area della superficie sottostante alla curva.
- Ponendo *E* =1 si ottiene

  $a^{n+1}/(n+1)$

  che è il risultato esatto.
- Questo risultato risulta valido anche con valori frazionari di *n*.

Fermat - opere

- Ovviamente, per ottenere l'integrale tra *a* e *b* basta fare l'integrale tra 0 e *b* e sottrarre quello da 0 ad *a*.
- Anche per valori negativi di *n* Fermat usava lo stesso metodo, solo prendeva *E*>1 e lo faceva tendere ad 1. Egli trovava in questo caso il valore dell'integrale generalizzato da *a* all'infinito oppure da *b* all'infinito e sottraendo l'uno dall'altro trovava l'integrale tra *a* e *b*.

Fermat - opere

- Questo procedimento si rivelò inapplicabile per $n=-1$, ancorché esso fosse già stato risolto da un gesuita fiammingo precedente a Fermat, Gregorio di San Vincenzo (1584-1667).
- Questi aveva notato che se si prendevano sull'iperbole $xy=1$ dei punti e se ne conduceva la perpendicolare all'asse delle *x*

Fermat - opere

- in modo tale che gli intervalli che ne conseguivano fossero in proporzione geometrica, l'area risultava crescere in proporzione aritmetica. Quindi ad un prodotto corrispondeva una somma, e quindi l'area compresa tra le parallele all'asse *y* passanti per *a* e *b*, l'asse *x* e l'iperbole valeva

  $lg\, b - lg\, a$

Fermat - opere

- Può sembrare strano che Fermat non si sia accorto, calcolando tangenti a parabole e iperboli e aree sottostanti ai grafici di tali funzioni che il calcolo della aree era l'operazione inversa della determinazione delle tangenti.
- Peraltro già Cartesio aveva affrontato problemi di questo tipo, che gli aveva proposto padre Mersenne (problemi **inversi della tangente**)

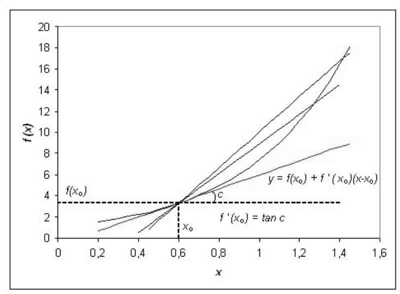
Fermat - opere

- Di fatto non faceva altro che fare quello che adesso chiameremmo il **limite del rapporto incrementale**, e uguagliarlo a 0
- Fermat non conosceva il concetto di limite, ma andava a cercare dove il rapporto incrementale si avvicinava allo 0.
- Fermat quindi è il **primo ideatore del calcolo differenziale**, oltre che il creatore, insieme a Cartesio, della geometria analitica

Fermat - opere

- Fermat trovò anche che il coefficiente angolare della tangente ad una curva (algebrica) era il rapporto incrementale tra due punti vicini, che poi veniva assimilato allo 0.

Fermat - opere



Fermat - opere

$$ax+by= c^2$$

(il quadrato è per mantenere l'omogeneità)

era rappresentato da un segmento della retta nel primo quadrante compreso tra gli assi coordinati

Fermat - opere

- All'iperbole

$$xy= k^2$$

viene ricondotta l'equazione generica

$$xy+a^2= bx+cy$$

mediante una traslazione d'assi del sistema di coordinate

Fermat - opere

- La conica degenere

$$x^2 = y^2$$

era una sola semiretta nel I quadrante, e a questa forma Fermat riduceva le equazioni omogenee di 2° grado

- La parabola

$$a^2 \pm x^2 = by$$

- Il cerchio

$$x^2+y^2 +2ax +2by =c^2$$

Fermat - opere

- L'iperbole

$$a^2 - x^2 = ky^2$$

Inoltre Fermat sa applicare trasformazioni per ridurre le coniche a **forma canonica**

- Poiché la *Isagoge* fu pubblicata dopo la morte di Fermat (1665), la geometria analitica è stata attribuita a Cartesio, ma l'opera di Fermat circolava già da tempo negli ambienti dotti

Fermat - opere

- 1629: *Metodo per trovare i massimi e i minimi* (pubblicato dopo la morte)
- Fermat aveva considerato i luoghi geometrici del tipo

$$y=x^n$$

$n > 0$: *parabole di Fermat;*

$n<0$: *iperboli di Fermat*

(sono curve di ordine anche superiore al 4°)

Fermat - opere

- Metodo per determinare i massimi e minimi delle curve algebriche $f(x)$
- Calcola

$$f(x+E) - f(x)$$

e nota che nei punti di massimo e di minimo quella differenza è quasi 0. Anzi, più piccolo è E e più si avvicina a 0. Allora divide per E e pone $E = 0$ …. (0/0)

Fermat - opere

- Può sembrare strano che Fermat non si sia accorto, calcolando tangenti a parabole e iperboli e aree sottostanti ai grafici di tali funzioni che il calcolo della aree era l'operazione inversa della determinazione delle tangenti.
- Peraltro già Cartesio aveva affrontato problemi di questo tipo, che gli aveva proposto padre Mersenne (problemi **inversi della tangente**)

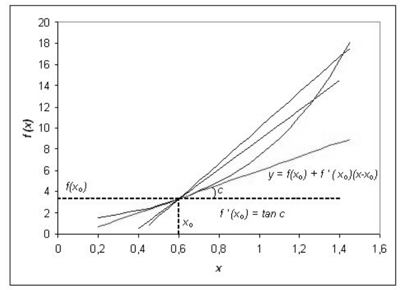
Fermat - opere

- Di fatto non faceva altro che fare quello che adesso chiameremmo il **limite del rapporto incrementale**, e uguagliarlo a 0
- Fermat non conosceva il concetto di limite, ma andava a cercare dove il rapporto incrementale si avvicinava allo 0.
- Fermat quindi è il **primo ideatore del calcolo differenziale**, oltre che il creatore, insieme a Cartesio, della geometria analitica

Fermat - opere

- Fermat trovò anche che il coefficiente angolare della tangente ad una curva (algebrica) era il rapporto incrementale tra due punti vicini, che poi veniva assimilato allo 0.

Fermat - opere



Fermat - opere

$$ax+by= c^2$$

(il quadrato è per mantenere l'omogeneità)

era rappresentato da un segmento della retta nel primo quadrante compreso tra gli assi coordinati

Fermat - opere

- All'iperbole

$$xy= k^2$$

viene ricondotta l'equazione generica

$$xy+a^2= bx+cy$$

mediante una traslazione d'assi del sistema di coordinate

Fermat - opere

- La conica degenere

$$x^2 = y^2$$

era una sola semiretta nel I quadrante, e a questa forma Fermat riduceva le equazioni omogenee di 2° grado

- La parabola

$$a^2 \pm x^2 = by$$

- Il cerchio

$$x^2+y^2 +2ax +2by =c^2$$

Fermat - opere

- L'iperbole

$$a^2 - x^2 = ky^2$$

Inoltre Fermat sa applicare trasformazioni per ridurre le coniche a **forma canonica**

- Poiché la *Isagoge* fu pubblicata dopo la morte di Fermat (1665), la geometria analitica è stata attribuita a Cartesio, ma l'opera di Fermat circolava già da tempo negli ambienti dotti

Fermat - opere

- 1629: *Metodo per trovare i massimi e i minimi* (pubblicato dopo la morte)
- Fermat aveva considerato i luoghi geometrici del tipo

$$y=x^n$$

n >0 : *parabole di Fermat;*

n<0 : *iperboli di Fermat*

(sono curve di ordine anche superiore al 4°)

Fermat - opere

- Metodo per determinare i massimi e minimi delle curve algebriche *f(x)*
- Calcola

$$f(x+E) - f(x)$$

e nota che nei punti di massimo e di minimo quella differenza è quasi 0. Anzi, più piccolo è *E* e più si avvicina a 0. Allora divide per *E* e pone *E* = 0 …. (0/0)