

Storia della Matematica

6a settimana

La derivazione

Il rapporto incrementale

- Tra i problemi posti da Cartesio nella *Géométrie* c'era quello delle tangenti alle curve. Descartes e soprattutto Fermat lo avevano risolto nel caso di esempi semplici e poi di curve algebriche, cioè esprimibili come zeri di un polinomio. Fermat calcolava il rapporto incrementale e poi poneva uguale a 0 l'incremento:

Il rapporto incrementale

- In un caso semplice, chiamando E l'incremento:

$$\frac{(x+E)^2 - x^2}{E} = \frac{2Ex + E^2}{E} = 2x + E$$

- e posto $E = 0$ si ha che la derivata è $2x$. Come si vede, non è eseguito un limite.

Il rapporto incrementale

- Il metodo di Fermat si applicava anche ad alcune curve trascendenti e in linea di principio anche a curve la cui equazione conteneva dei radicali, ma diventava praticamente inservibile al crescere della complessità dell'equazione

Leibniz

Leibniz

- **Wilhelm Gottfried Leibniz** (1646-1716)
- Nobile tedesco di origine boema, storico, filosofo, diplomatico, matematico, linguista



Leibniz

- Viaggia, promuove la fondazione delle accademie di Vienna e S. Pietroburgo (che però iniziano la loro attività dopo la sua morte), è socio di altre. La sua residenza abituale è Hannover, dove è lo storico, il bibliotecario e il consigliere diplomatico del duca di Brunswick, il suo grande protettore.

Leibniz

- Ha grande influenza sulla vita politica e culturale di gran parte dell'Europa; i suoi consigli sono richiesti dallo zar Pietro il Grande e dall'Imperatore. Con i suoi contatti diplomatici influisce sull'ascesa di Giorgio Luigi di Hannover al trono d'Inghilterra (1714) e aspira a seguirlo, ma viene lasciato in Germania a scrivere la storia della famiglia di Brunswick.

Leibniz

- È per quasi un anno in Italia (1689-1690), visita varie università e contatta matematici, resta sei mesi a Roma, da dove fa una puntata a Napoli. A Roma c'è l'ipotesi di nominarlo bibliotecario della biblioteca Vaticana, ma è protestante e la cosa sfuma.

Leibniz

- Si ferma a Venezia sia all'andata che al ritorno, sta una settimana a Padova per andare a Este, Monselice e all'eremo di Santa Maria delle Carceri.

Leibniz

- Ha frequentissimi e buoni contatti epistolari con i matematici padovani e quando la cattedra di matematica di Padova resterà vacante Leibniz userà la sua influenza affinché venga chiamato a ricoprirla un giovane e valente svizzero, Jacopo Hermann, che gli dedicherà l'opera scritta a Padova

Leibniz

- Nell'ottobre del 1684 Gottfried Wilhelm Leibniz pubblica sugli *Acta eruditorum* un breve ma fondamentale scritto dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*

Leibniz

- (Nuovo metodo per i massimi e minimi e del pari per le tangenti, che non utilizza quantità fratte o irrazionali, e un tipo specifico di calcolo per essi)
- Il punto centrale del metodo di Leibniz era un'operazione, la differenziazione, che permetteva di passare dall'equazione algebrica di una curva ad un'equazione in cui comparivano i differenziali, e, tramite questa, di trovare la tangente alla curva

Leibniz

- Leibniz introduce la notazione differenziale, usando per quantità "molto piccole" le notazioni dx e dy (il segno d , già usato da Cartesio, viene da "differentia", che noi oggi chiameremmo "incremento");
- introduce quindi prima il differenziale di una variabile (dipendente o indipendente) e soltanto dopo introdurrà il loro rapporto.

La derivata

La derivata

- Leibniz espone vari calcoli di **differenziali**:
 $d(2x) = 2dx$
 $d(u+v) = du + dv$
 $d(vu) = dv \cdot u + v \cdot du$
- In particolare scrive:
 se $y = v$, allora $dy = dv$
 $d(v/y) = (ydv - vdy)/y^2$
 $d(y/v) = 1/d(v/y)$

La derivata

- In scritti successivi ci sono quasi tutte le regole di derivazione che conosciamo, compresa quella di derivazione di una potenza ad esponente frazionario (non ancora le derivate di funzioni trascendenti)

La derivata

- Leibniz dice che i differenziali possono essere proporzionali alle diminuzioni “momentanee” delle variabili: c’è, anche se non ancora esplicitamente, il concetto di *infinitesimo* (del primo ordine...)
- Successivamente Leibniz divide per dx e nasce la notazione di *derivata* ancora come quoziente di quantità molto piccole

La derivata

- Il problema inverso delle tangenti, cioè il passaggio dall’equazione scritta con i differenziali all’equazione della curva, divenne immediatamente il problema principale del calcolo, essendo legato da una parte alla quadratura delle figure (cioè al calcolo della loro area) e dall’altra a una serie di problemi sia geometrici che meccanici.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

- Il problema inverso delle tangenti è risolto dal teorema di Torricelli-Barrow:
- Data una funzione (continua e positiva) f definita su un intervallo $[a,x]$, l’area compresa tra il suo grafico e l’asse delle ascisse è una funzione F di x , e la funzione che esprime in ogni punto il coefficiente angolare della tangente al grafico di tale funzione F coincide con la f .

Teorema fondamentale del calcolo integrale

- Oggi esprimiamo questo teorema dicendo che F è una primitiva di f .

Serie

Serie

- Vari matematici fin dall’antichità si sono interessati di processi infiniti, in primo luogo dell’operazione di serie.
- Nei secoli XVII e XVIII c’è stato un grande interesse per le serie di potenze, delle quali alcune particolari furono studiate singolarmente e fornirono risultati interessanti.

Mengoli

- **Pietro Mengoli** (1626-1686) fu allievo di Cavalieri a Bologna e quindi lo sostituì nella cattedra. Si occupò di geometria, di astronomia, della rifrazione della luce nell'atmosfera, di musica.

Mengoli

- I suoi lavori scritti in un latino piuttosto oscuro, sono ispirati alla teoria degli indivisibili di Cavalieri e anticipano il calcolo differenziale: Leibniz ne era a conoscenza diretta, mentre Newton ne seppe attraverso Wallis. Tuttavia le sue opere furono presto dimenticate e solo recentemente gli è stato dato merito.

Mengoli

- In *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*, pubblicato a Bologna nel 1650, Mengoli tratta le serie, sviluppando idee che erano state materia di studio di matematici italiani.
- Il primo argomento fu lo studio della serie geometrica, determinandone la somma

Mengoli

- Dimostrò la non convergenza della serie armonica, risultato peraltro già raggiunto da Oresme, riconfermando quindi la possibilità di ottenere un numero infinito nella somma di una serie i cui termini tendono ad annullarsi. Studiò anche la serie armonica con segni alternati che dimostrò convergere a $\log 2$. Questa serie era stata studiata in precedenza anche da Nicolaus Mercator.

Serie

- Esaminiamo la serie geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (x \text{ reale})$$
- Questa converge, come è noto, per $|x| < 1$, mentre diverge a $+\infty$ per $x \geq 1$ e diverge ad ∞ per $x < -1$. Per gli x per i quali converge, la sua somma è $1/(1-x)$ (la somma è calcolata come il limite della somma della progressione geometrica).

Serie

- Ponendo $x = -1$ la serie (se fosse convergente!) sembrerebbe convergere a $1/2$, il che sembrò a Leibniz un paradosso, in quanto la successione delle somme parziali oscilla tra 1 e 0

La nascita delle macchine da calcolo

La calcolatrice di Leibniz

- Nel 1673 Leibniz presenta alla Royal Society di Londra la prima calcolatrice meccanica in grado di moltiplicare e dividere. Esistevano già dei progetti di macchine per addizioni e sottrazioni: una era stata effettivamente realizzata dal francese Blaise Pascal e di un'altra, di Wilhelm Schickard, c'erano disegni (poi perduti in un incendio)

La calcolatrice di Leibniz

- L'invenzione fruttò a Leibniz l'ammissione alla Royal Society, ma non ebbe applicazione immediata per le difficoltà tecniche di realizzazione.



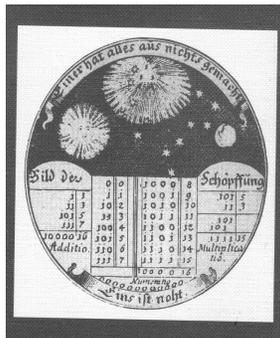
Calcolatrice di Leibniz (1673)
Museo di Berlino

La calcolatrice di Leibniz

- La calcolatrice di Leibniz verrà ripresa nel 1820 da Xavier Thomas de Colmar e costituirà la base di quasi tutte le calcolatrici meccaniche a quattro operazioni realizzate successivamente.

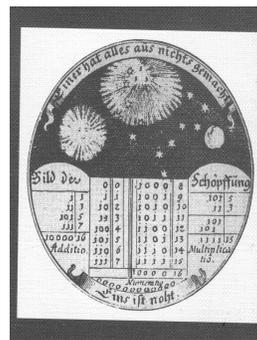
Il sistema binario

- Pur non avendo avuto una applicazione pratica al momento in una macchina da calcolo, il sistema binario divenne il fondamento di tutta l'informatica e fu ideato da Leibniz



Il sistema binario

- “L’unità ha fatto tutto dal nulla”
- “Immagine della creazione”
- “Addizione – Moltiplicazione- Numerazione”
- “L’unità è necessaria”

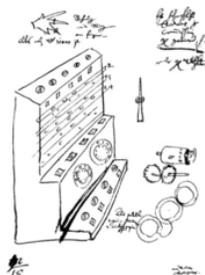


La calcolatrice di Schickard

- **Wilhelm Schickard** (1592 –1635)
- Professore di ebraico e di aramaico, quindi di astronomia.
- Inventò varie macchine, una anche per lo studio della struttura della lingua ebraica. Morì di peste



La calcolatrice di Schickard



Macchina calcolatrice di Schickard (1623)

- Il suo funzionamento è descritto in un lettera di Schickard a Keplero
- La macchina poteva sommare e sottrarre numeri a sei cifre, e suonava una campanella quando veniva superata la sua capacità

La calcolatrice di Schickard



(ricostruzione)

La calcolatrice di Pascal

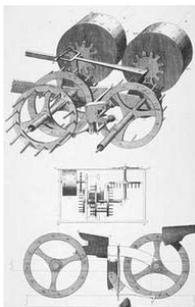
- Macchina calcolatrice inventata a soli 19 anni da Pascal per aiutare il padre, intendente delle imposte a Rouen.
- In suo onore Wirth dette il nome di PASCAL al linguaggio di programmazione da lui ideato



Pascalina
Conservatorio Nazionale di
e Arti e Mestieri
(Parigi)

La calcolatrice di Pascal

- La *pascalina* faceva le sottrazioni come somma di numeri negativi utilizzando il metodo del complemento a dieci del sottraendo.



Newton

Newton

- **Isaac Newton** (1642-1727) fu matematico, fisico, astronomo, filosofo, membro del parlamento inglese, presidente della Royal Society



Newton

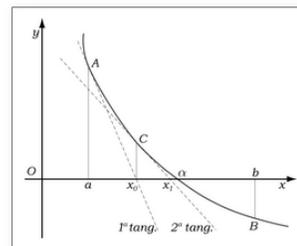
- Il padre morì tre mesi prima che lui nascesse, la madre si risposò, ma Newton fu molto in contrasto col patrigno e fu allevato da una nonna. Alla morte del patrigno Newton ereditò una fortuna piuttosto consistente che gli permise di studiare e vivere agiatamente. Studiò al Trinity College di Cambridge, che però fu chiuso per la peste, e Newton continuò da solo.

Newton

- Durante gli studi scoprì lo sviluppo delle potenze del binomio (*coefficienti binomiali*) e il cosiddetto “metodo delle tangenti”, che è uno dei metodi per il calcolo approssimato di uno zero di una funzione. Esso si applica dopo avere determinato un intervallo che contiene una sola radice.

Newton - Metodo delle tangenti

- Il metodo iterativo che ne deriva converge se la funzione ha derivate prima e seconda diverse da 0 (in figura è: $f' < 0, f'' > 0$)



Newton

- Newton scoprì la legge di gravitazione universale (l'aneddoto della mela cadutagli in testa, certamente falso, è riferito ad un evento del 1666), confermando così il modello del sistema solare di Keplero, ma scoprì che le orbite potevano anche essere paraboliche o iperboliche

Newton e Halley

- Newton abbandonò per un certo tempo gli studi astronomici perché aveva sbagliato i calcoli sull'orbita della Luna (non aveva tenuto conto delle perturbazioni dovute agli altri pianeti). Vi ritornò quando gli fu proposto un problema da Halley

Newton e Halley

- **Sir Edmond Halley** (1656-1742), astronomo reale, studiò una cometa nel 1682 e ne predisse il ritorno dopo 76 anni.
- Convinse Newton a pubblicare i suoi studi



La cometa di Halley



- La cometa come disegnata da Halley nel 1682

La cometa di Halley



La cometa di Halley (passaggio 1986)



Sonda Giotto

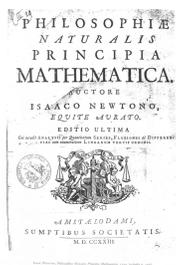
Newton

- Newton studiò anche la rifrazione della luce e scoprì la scomposizione della luce bianca



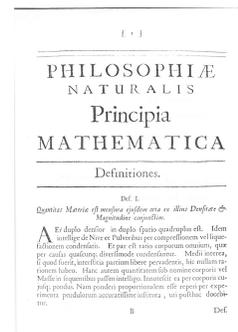
Newton

- Nel 1687 Newton finalmente pubblica la sua grande opera:
- *Philosophiæ naturalis principia mathematica*
- (Basi matematiche della fisica)



Newton

- In quest'opera usa per la prima volta il termine *gravitas*;
- enuncia la legge di gravitazione universale e introduce il calcolo infinitesimale;
- tramite la legge di Boyle-Mariotte sui gas (scoperta nel 1662) determina la velocità del suono nell'aria



Newton

- Newton parla delle *flussioni* che sono le derivate delle *fluenti* (funzioni) e tratta di queste piuttosto che dei differenziali; trova velocità e accelerazione.
- Leibniz invece tratta i differenziali come fossero quantità a sé stanti e indivisibili, delle *monadi*, ed è interessato al problema delle tangenti

Newton

- Newton applica la derivazione anche ad alcune funzioni trascendenti, calcola velocità; gli viene proposto il problema della brachistocrona e lo risolve in una notte. Calcola la somma di alcune serie convergenti (peraltro già note) e tramite queste calcola π con una buona approssimazione

Newton

- Nell'ultimo decennio del '600 Newton fu preso da una crisi che potremmo definire di follia (tra l'altro si diceva convinto di essere il nuovo Messia), e abbandonò i suoi studi di matematica. I suoi amici gli fecero avere il posto di guardiano della Zecca reale, di cui poi divenne direttore, e quindi ministro delle finanze (*Cancelliere dello Scacchiere*).

Newton

- La sua attività alla Zecca fu molto impegnata, dedicata ad una riforma dell'economia monetaria e ad una lotta ai falsari; fece chiudere le filiali della Banca d'Inghilterra, centralizzando la coniazione della moneta; anticipò il *gold standard*, cioè un cambio fisso tra la sterlina e l'oro, che l'Inghilterra adotterà per prima nel 1717

Newton

- Sulla base del gold standard, a cui hanno poi aderito anche altri stati, l'economia mondiale si è retta ancora nel 1900.

Newton

- Newton in vita ebbe grandissimi onori, fu nominato "cavaliere"; non si sposò, ebbe soltanto una passione giovanile. Morì nel 1727 ad 84 anni e fu sepolto a Westminster. Voltaire che era presente ai funerali disse che era stato sepolto come un re



Tomba di Newton

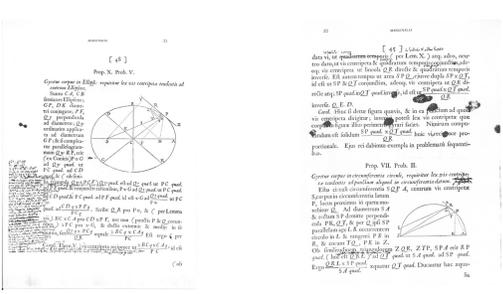
Leibniz e Newton

Leibniz e Newton

- Leibniz durante il suo viaggio in Italia legge il testo di Newton e vi scrive dei commenti a margine



Leibniz e Newton



Glosse di Leibniz sulla gravitazione

Impronte digitali di Leibniz

Leibniz e Newton

- Leibniz aveva avuto una corrispondenza con Newton nel 1677, nella quale si erano scambiati, in maniera più o meno chiara, i principi da ciascuno elaborati sul calcolo infinitesimale. Successivamente Leibniz andò in Inghilterra, dove alcuni matematici inglesi lo accusarono di aver copiato la teoria da Newton e di averla diffusa in Europa come propria

Leibniz e Newton

- Ne nacque una lunga diatriba per l'attribuzione della priorità della scoperta, e nel 1704 Leibniz si appellò alla Royal Society per ottenere un giudizio. La questione durò diversi anni; furono esaminate le lettere (che poi verranno pubblicate), e la Royal Society attribuì la paternità a Newton (probabilmente Newton stesso stese la relazione finale)

Leibniz e Newton

- Newton non volle mai riconoscere il contributo di Leibniz e anzi nelle edizioni successive della sua opera *Philosophiae naturalis* tolse qualsiasi accenno all'opera di Leibniz. Adesso la priorità di Newton è certa, ma anche la minore applicabilità del suo metodo rispetto a quello di Leibniz; è anche certo che Leibniz elaborò la sua teoria indipendentemente

Leibniz e Newton Bibliografia italiana

Michael-Thomas Liske, *Leibniz*, Il Mulino, Bologna, 2007

V. Mathieu, *Introduzione a Leibniz*, Laterza, Bari, 2002

Massimo Mugnai, *Introduzione alla filosofia di Leibniz*, Einaudi, Torino, 2001

G. Cantelli, *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006

Alfred Rupert Hall, *Filosofi in guerra. La polemica tra Newton e Leibniz*, Il Mulino, Bologna, 1988

La lingua universale logica

La lingua universale logica

- L'idea di lingua universale ha affascinato moltissimi filosofi, studiosi e anche persone comuni dai tempi dell'antica Grecia. Nel periodo di cui ci stiamo occupando questa idea affascinò, tra i molti altri, Cartesio, Newton e Leibniz

La lingua universale logica

- Tutti e tre andarono alla ricerca di una lingua logica "a priori", in cui le parole fossero costruite secondo un principio logico, senza che le radici avessero necessariamente un legame con le radici delle lingue esistenti

La lingua universale logica

- Secondo Cartesio l'insieme apparentemente infinito di concetti poteva essere ridotto ad un numero limitato di concetti base, dal quale tutti gli altri si potevano derivare, come qualsiasi numero può essere espresso con solo dieci cifre. Poche grandi specie avrebbero a loro volta poche sottospecie, le quali avrebbero sottospecie e così via

La lingua universale logica

- Questo sarebbe potuto succedere solo dopo una grande riorganizzazione delle cose, inscindibile da una grande riorganizzazione della società. La lingua era comunque vista come un fenomeno sociale, per quanto sganciata dalle lingue esistenti. Tuttavia la lingua era vista come una riorganizzazione del pensiero prima che come un mezzo di comunicazione

La lingua universale logica

- Questo concetto logico-filosofico della lingua giunse in Inghilterra a metà del sec XVII ed interessò la Royal Society, in particolare il suo segretario Wilkins che effettivamente costruì una lingua su questo principio e il chimico Boyle, che pare la parlasse.

La lingua universale logica

- Newton scrisse nel 1661 o 1662 un'opera che non fu pubblicata e fu scoperta solo nel 1936: *Sulla lingua universale*. I nomi degli oggetti e le idee del mondo costituivano le parole e le relazioni tra esse erano la grammatica. Newton divideva queste relazioni fino a differenze molto piccole, che difficilmente si troverebbero nella comunicazione tra persone.

La lingua universale logica

- Leibniz scrive nel 1704 *Nuove esperienze sull'intelletto umano* (pubblicata nel 1765). La logica dovrebbe scomporre le nozioni in concetti semplici e, come i segni matematici mettono in relazioni i numeri, così nella lingua universale le nozioni elementari potrebbero costituire l'alfabeto della lingua logica.

La lingua universale logica

- Secondo Leibniz è logico avere solo due categorie morfologiche: sostantivi e verbi. Un sistema di affissi permetterebbe di passare da una categoria all'altra. Altri affissi permettevano di creare parole derivate. Se la sintassi era sintetica, la grammatica era analitica, con preposizioni, pronomi, congiunzioni

La lingua universale logica

- Leibniz vedeva anche una scrittura universale mettendo in corrispondenza le prime 9 consonanti dell'alfabeto latino con le cifre da 1 a 9 e alle cinque vocali corrispondevano le prime cinque potenze di 10.
- Le lingue universali che verranno proposte nei secoli successivi saranno più vicine all'idea di Leibniz che non a quelle di Cartesio e Newton.