

Storia della Matematica

8a settimana

Il numero e

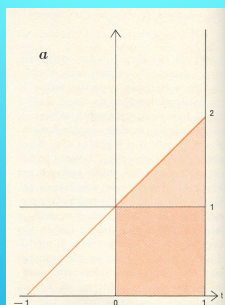
Il numero e

- Giacomo Bernoulli fu il primo a considerare il numero e come limite della successione $(1+1/n)^n$
- Tale successione ha una interpretazione economica molto semplice:

Il numero e

- Ricordiamo che il *montante* è la somma del capitale C più gli interessi; se l'interesse è i (solitamente espresso in percentuale) e il tempo è t , il capitale alla scadenza è $C(1 + it)$
- Se si prende a prestito un capitale C e l'interesse è del 100% annuo quindi $i = 1$, alla fine di un anno ($t = 1$) bisogna restituire $2C$ (*interesse semplice*)

Il numero e



Interesse semplice (in figura è $i = 1$)

Il numero e

- Se si suddivide l'anno in semestri, e dopo il primo semestre si capitalizzano gli interessi (*interesse composto*), alla fine dell'anno è

$$C(1 + i/2)^2$$

- Prendendo per comodità $C = 1$, in generale se suddividiamo l'anno in n frazioni di anno e ricapitalizziamo gli interessi ad ogni frazione abbiamo

$$(1 + i/n)^n$$

Il numero e

- Se ad esempio si ricapitalizzano gli interessi ogni 3 mesi (un quarto di anno) si ha

$$(1 + i/4)^4$$

- Se si ricapitalizzasse ogni giorno (l'anno finanziario è per comodità supposto di 360 gg., onde avere la divisibilità anche per 3) si ha

$$(1 + i/360)^{360}$$

Il numero e

- La ricapitalizzazione continua dà luogo ad un limite per $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i/n)^n$$

Bernoulli riconosce che la successione è strettamente crescente (e quindi ha limite finito o $+\infty$) ed è superiormente limitata.

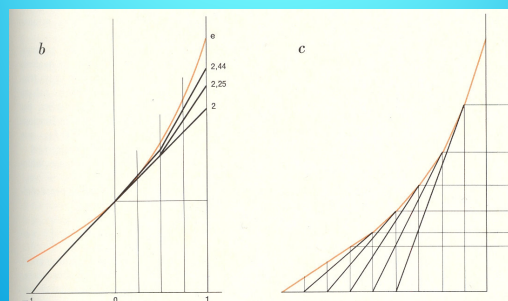
Il numero e

Nel caso $i = 1$ il calcolo porta al valore

2,7182818284....

che è stato chiamato e , forse come iniziale di “esponenziale”

Il numero e



Interesse composto

Il numero e e i logaritmi

- Riprendendo i logaritmi, ricordiamo che i primi ideati da Nepero (1550-1617) *non* erano in base e , bensì $1/e$ e solo con gli studi successivi di Nepero e Briggs si giunse ai logaritmi in base 10 (tabellati da Briggs) e in base e (Nepero aveva costruito i logaritmi come una relazione tra i movimenti di due corpi che si muovono con velocità diverse)

I logaritmi

- Seguirà poi una lunga diatriba su quale significato si potesse dare ai logaritmi dei numeri negativi: Leibniz ed Eulero sosterranno che questi sono numeri immaginari, mentre Giovanni Bernoulli li definiva istituendo un prolungamento per parità, cioè ponendo

$$\lg(-x) = \lg x$$

I logaritmi

Giovanni Bernoulli giustificava questo prolungamento con la relazione

$$x^2 = (-x)^2$$

da cui derivava l'uguaglianza

$$2 \lg x = \lg x^2 = \lg(-x)^2 = 2 \lg (-x)$$

Vi furono vari matematici che difesero l'una e l'altra tesi, fin quando Eulero non risolse definitivamente la questione con la funzione esponenziale nel campo complesso

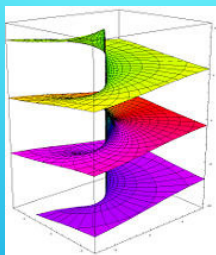
I logaritmi

- Il logaritmo nel campo complesso è definito come funzione a più valori

$$\lg z = \ln |z| + i(\arg z + 2K \pi)$$

- (non c'è il logaritmo di 0, c'è invece il logaritmo dei reali negativi)
- Una sua rappresentazione è la seguente

I logaritmi



I logaritmi

- Nepero voleva trovare un modo per eseguire prodotti e divisioni velocemente. Successivamente sono stati costruiti strumenti di facile uso per effettuare questi calcoli.

Regolo calcolatore



Giovanni Bernoulli

- **Giovanni Bernoulli** (1667-1748), decimo figlio dei genitori Bernoulli e di quasi tredici anni più giovane del fratello Giacomo.



Giovanni Bernoulli

- Il padre lo aveva indirizzato verso il commercio e Giovanni conseguì il dottorato nel 1690 con una tesi sull'effervescenza e la fermentazione. Si dedicò poi alla matematica. Fu spesso in litigio con il fratello, a cui peraltro succedette nella cattedra di matematica a Basilea.

Giovanni Bernoulli

- Scacciò di casa il figlio perché aveva vinto un premio all'Accademia Francese delle Scienze a cui anche lui aveva partecipato. Fu molto amico di Eulero, a volte rivale; disprezzava invece Newton.
- Scrisse di chimica, fisica, astronomia; fece uno studio sulle maree e sulle vele gonfiate dal vento

Altri membri della famiglia Bernoulli

- **Nicola** (II) (1687-1759), nipote di Giacomo e di Giovanni (e figlio di un Nicola) fu professore a Padova per tre anni, si occupò della pubblicazione delle opere di Giacomo
- Fu in corrispondenza con Eulero, del quale criticava l'uso delle serie divergenti; riuscì a calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$$

Altri membri della famiglia Bernoulli

- **Daniele** (1700-1782), figlio di Giovanni, professore all'Accademia di S. Pietroburgo, vinse dieci volte il premio dell'Accademia di Parigi. Studiò idraulica, probabilità, le corde vibranti, la teoria cinetica dei gas



De l'Hôpital

- **Guillaume François Antoine de Saint Mesme, marchese de l'Hôpital, o de l'Hospital** (1661 – 1704)



De l'Hôpital

- 1696: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Analisi degli infinitamente piccoli per la comprensione delle linee curve). È il primo manuale scolastico di calcolo differenziale; in esso questa materia è presentata secondo la visione di Leibniz.

De l'Hôpital

- In tale opera compare la famosa regola di L'Hôpital, che può essere considerata una generalizzazione della formula di Taylor quando le funzioni hanno le derivate continue e diverse da 0 in un intorno del punto; ricordiamo che tale formula era già stata scoperta da Gregory nel 1671 e verrà poi (ri)pubblicata da Taylor nel 1715

De l'Hôpital

- L'Hôpital dichiara apertamente il suo debito verso Leibniz e particolarmente verso Giovanni Bernoulli, al quale probabilmente si deve anche la famosa regola. Comunque nel 1694 i due avevano fatto un accordo che prevedeva un compenso che L'Hôpital avrebbe pagato a Bernoulli (300 franchi l'anno) per risolvere problemi matematici

De l'Hôpital

- Tale accordo stabiliva però che Bernoulli non rivendicasse alcun diritto su tali risoluzioni e, ovviamente, che il patto rimanesse segreto.
- Nel 1704 dopo la morte di L'Hôpital, Bernoulli rivelò il patto ed accusò di plagio il marchese; nel 1922 furono trovati documenti che confermano l'esistenza dell'accordo

De l'Hôpital

- Il manuale *Analyse des infiniment petits*, scritto in maniera molto chiara e didatticamente efficiente, fu popolarissimo e su di esso studiarono generazioni di matematici; del pari ebbe vasta diffusione un'altra sua opera, *Traité analytique des sections coniques* (1707, postumo)

Jacopo Riccati

- **Jacopo Riccati** (Venezia 1676-1754), nobile di Castelfranco Veneto, creò intorno a sé a Venezia un circolo di matematici molto vivace. Porta il suo nome un tipo di equazione differenziale non lineare del primo ordine che si può ridurre ad una lineare



Jacopo Riccati

- Si occupò in particolare della **idrodinamica** sulla base della meccanica newtoniana, che collaborò a introdurre in Italia. Gli venne offerta la presidenza dell'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo, ma rifiutò per non rinunciare al suo stile di vita riservato. Gli è stato dedicato un asteroide, 14074 Riccati.

Jacopo Riccati

- Si occupò di equazioni differenziali della forma

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$$

che non sono generalmente risolvibili in modo elementare. Tali equazioni, studiate poi da Eulero, si possono ridurre ad equazioni di Bernoulli se se ne conosce una soluzione particolare

Vincenzo Riccati

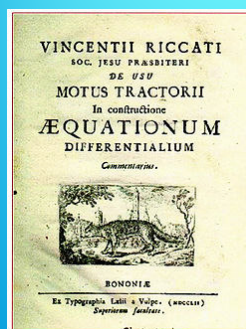
- **Vincenzo Riccati** (Castelfranco Veneto, 1707 – Treviso 1775).



Vincenzo Riccati

- Secondogenito di Jacopo Riccati, le sue ricerche principali continuarono quelle del padre nell'analisi matematica, specialmente nel campo delle equazioni differenziali, e nella fisica.

Vincenzo Riccati



- *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius*, Bologna, 1752

Vincenzo Riccati

- *Institutiones Analyticae*, 2 vol. con Saladini, Bologna, 1765-1767
- *Dialogo, dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso*, Bologna, 1749

Rolle

- **Michel Rolle** (1652-1719), matematico francese.
- Venne eletto alla Académie Royale des Sciences in 1685 e ne divenne un "pensionato" nel 1699.
- Si occupò di equazioni diofantee; il *Traité d'algèbre* (1690) sulla teoria delle equazioni propone l'idea che un numero abbia n radici n -sime.

Rolle

- Rolle è un oppositore molto agguerrito del modo in cui L'Hôpital presenta il calcolo differenziale, seguendo Leibniz e Bernoulli. L'Hôpital usava le serie (di Taylor) senza preoccuparsi del resto e l'infinitamente piccolo era pur sempre una quantità costante e definita, mentre Rolle sosteneva che era variabile

Rolle

- Rolle descrive il calcolo come “una congerie di errori ingegnosi”.
- A lui si deve la notazione

$$\sqrt[n]{x}$$

per indicare la radice n-esima di x.

Rolle

- In un oscuro libretto, *Metodo per risolvere le equazioni* (1691), Rolle si imbatte in alcune equazioni delle quali vuole trovare la soluzione approssimata. All'interno di questa ricerca enuncia e dimostra il noto teorema

Rolle

- **Teorema di Rolle:** se una funzione è continua in un intervallo chiuso $[a,b]$, derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a,b) e assume agli estremi valori uguali $f(a) = f(b)$, esiste almeno un punto interno ad (a,b) la cui derivata si annulla, cioè

$$f'(c) = 0 \quad (\text{punto critico o stazionario}).$$

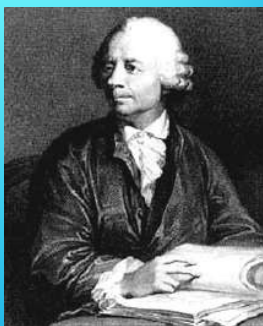
Rolle

- Rolle ha molte perplessità anche su come vengono risolte geometricamente alcune equazioni, nel calcolo delle quali si rischia di immettere altre soluzioni che non soddisfacevano l'equazione di partenza. Viene poi convinto da Varignon sull'utilità e sulla correttezza del calcolo infinitesimale

Eulero

Eulero

- **Leonhard Euler**, o **Eulero** (1707– 1783), il più grande matematico e fisico svizzero di tutti i tempi. Allievo di Giovanni Bernoulli, si è occupato di analisi infinitesimale, geometria, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi e molte altre cose.



Eulero

- Il padre lo avviò agli studi preparatori per la carriera ecclesiastica, ma, poi, convinto da Giovanni Bernoulli che era stato suo compagno, lasciò che il figlio si indirizzasse alla matematica.
- Eulero si laureò in filosofia, scrisse i primi lavori e arrivò secondo in un concorso dell'Accademia di Parigi su come disporre meglio gli alberi di una nave

Eulero

- Nel 1727, dopo aver invano concorso alla cattedra di matematica di Basilea, fu indirizzato all'Accademia di S. Pietroburgo come fisiologo, dove lo volle Caterina, moglie di Pietro il Grande. Scrisse allora un lavoro di acustica. A Pietroburgo entrò nella cerchia di Daniele Bernoulli e Jakob Hermann (che aveva insegnato a Padova)

Eulero

- Nel 1741, dopo un cambio di regime in Russia, accettò di passare all'Accademia di Berlino, ricevendo una parte del suo salario dall'Accademia di Pietroburgo per la quale scriveva libri e lavori scientifici.

Eulero

- A Berlino fu impegnato in molti lavori di direzione del personale, di idraulica, di matematica. Vi restò 25 anni e scrisse circa 380 articoli.
- Non più in buoni rapporti con l'imperatore Federico il Grande di Prussia, che aveva offerto la presidenza dell'Accademia a D'Alembert, tornò in Russia nel 1766.

Eulero

- Peraltro D'Alembert rifiutò la presidenza dell'Accademia di Berlino e il trasferimento da Parigi ritenendo non opportuno per sé un posto di livello superiore a quello di Eulero

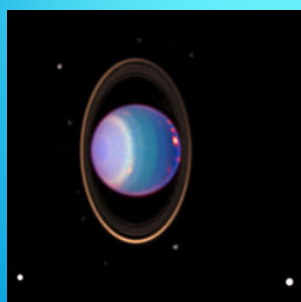
Eulero

- Poco dopo divenne cieco, prima da un occhio e poi anche dall'altro, ma continuò a scrivere decine di articoli, aiutato da due dei numerosissimi figli (uno era professore di fisica, l'altro era nella carriera militare). La cecità gli stimolò enormemente la capacità di calcolo mentale

Eulero

- In un pomeriggio del settembre 1793, dopo aver dato lezione di matematica ai nipoti ed aver discusso della scoperta di Urano fatta da Herschel nel 1781, si accasciò, disse "Muio", e morì di un'emorragia cerebrale.

Eulero

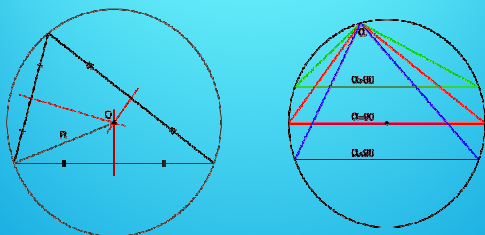


- Di Urano sono stati scoperti due zone di anelli e una trentina di satelliti. Nel 2007 l'asse di rotazione di Urano ha raggiunto la direzione parallela all'eclittica

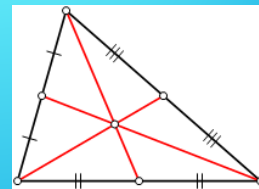
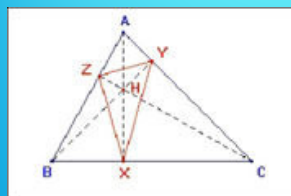
Eulero

- Moltissime formule, teoremi, elementi di geometria sono collegati al suo nome: retta di Eulero (è la retta passante per l'ortocentro, il baricentro e il circocentro di un triangolo), diagramma di Eulero-Venn, metodi di Eulero (risoluzione delle equazioni di 4° grado, e di equazioni differenziali), formule di Eulero, ...

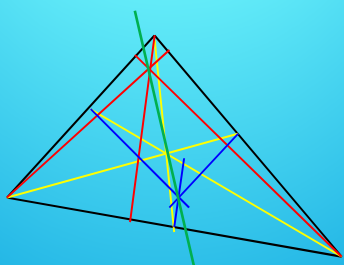
Circocentro (assi)



Ortocentro (altezze) Baricentro (mediane)



Retta di Eulero



Eulero

- Eulero si occupò del “problema di Basilea” che consisteva nel trovare la somma della serie

$$\zeta(2) = \sum_1 (1/n^2)$$

- A questo problema si erano dedicati i vari Bernoulli, Leibniz, De Moivre senza successo. Eulero trova che la somma vale $\pi^2/6$ (somma già trovata da Giovanni Bernoulli)

Eulero

- Scopri anche altre somme di serie numeriche tramite sviluppi in serie di funzioni calcolate in uno specifico punto.
- Scopri anche alcuni sviluppi in serie trigonometriche, che appartengono ad una famiglia di serie che poi si diranno “serie di Fourier”

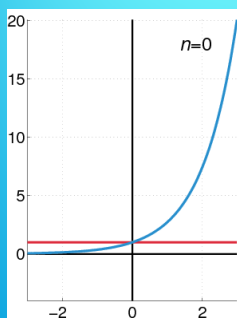
Eulero

- Alcuni sviluppi in serie di Taylor di particolari funzioni trigonometriche hanno per coefficienti dei numeri che prendono il nome di matematici famosi; ad esempio nello sviluppo della secante:

$$\sec x = \sum (-1)^n E_{2n} x^{2n} / (2n)! \quad |x| < \pi/2$$

gli E_{2n} sono detti **numeri** (interi) **di Eulero**

Approssimazione di e^x



- Approssimazione di e^x tramite la serie di Taylor

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$$

Eulero

Eulero istituì anche la relazione

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

dalla quale si ricavano le *formule di Eulero*:

$$\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i \quad \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$$

Per $\theta = \pi$ si ha:

$$e^{i\pi} = -1$$

Eulero

Dalla formula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

segue

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Eulero

- Dalla definizione di **funzione esponenziale** nel campo complesso segue che tale funzione è periodica di periodo $2\pi i$.
- Eulero definì anche il **logaritmo** come funzione a più valori:

$$\lg z = \ln |z| + i(\arg z + 2K\pi) \quad K \in \mathbf{Z}$$

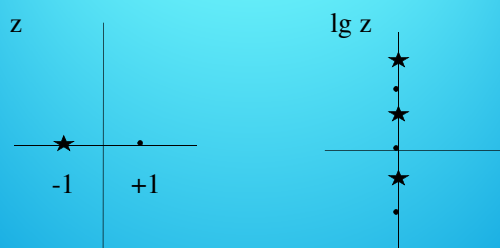
Eulero

Sono così definiti i logaritmi dei numeri reali negativi; ad esempio

$$\lg(-1) = i(\pi + 2K\pi)$$

Risultano con la stessa parte reale i logaritmi dei numeri complessi con lo stesso modulo

Eulero



Eulero

- La questione del logaritmo dei numeri negativi è così definitivamente risolta:

le due funzioni

$$\lg x^2 \quad \text{e} \quad 2 \lg x$$

non sono uguali perché sono definite su due insiemi diversi; i loro valori coincidono sul semiasse dei reali positivi, dove esistono entrambe

Eulero

- Per una funzione di variabile complessa

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (w = f(z))$$

non ha senso il concetto di crescita; per la funzione esponenziale nel corpo complesso la proprietà corrispondente alla positività tra i reali è la diversità da 0 (e quindi il logaritmo di 0 non esiste nemmeno in $\mathbb{C}$)

Eulero

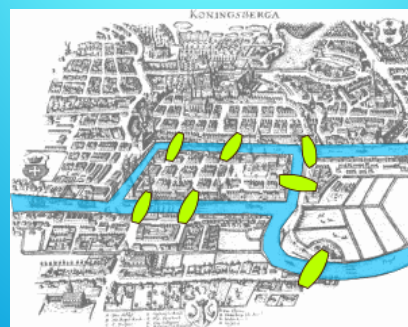
- Con Eulero si ha la sistemazione quasi definitiva delle funzioni elementari di variabile complessa.
- Con Eulero nasce anche una nuova branca della matematica: la topologia

Topologia

Topologia

- La **topologia** è lo studio delle proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza strappi, sovrapposizioni o incollature

Topologia: i ponti di Königsberg



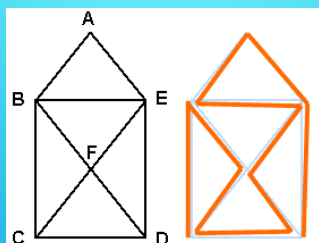
Topologia: i ponti di Königsberg



I ponti di Königsberg

- E' possibile fare una passeggiata attraversando esattamente una sola volta tutti i ponti?
- Eulero ricondusse il problema ad un problema di teoria dei grafi e trovò la soluzione. Nel caso dei ponti di Königsberg la risposta alla domanda è negativa

Senza staccare la penna



Topologia: indice topologico

- Trasformazione di una tazza da caffè in un toro (stesso indice topologico)



Topologia: indice topologico

