

Storia della Matematica

9a settimana

ATTENZIONE!

- Questa settimana NON c'è lezione venerdì 30 APRILE (festa giustiniana).
- Ci si rivede mercoledì 5 maggio, inizio della 10^a settimana.
- Pertanto NON comparirà in rete la 9^a settimana per i matematici

Il calcolo delle variazioni

Funzionali

- Si dicono **funzionali** delle funzioni il cui insieme di definizione è un insieme di funzioni (e le immagini sono numeri). L'interesse è per le funzioni *estremali*: quelle cioè che rendono massimo o minimo il valore del funzionale.

Funzionali

Alcuni problemi classici sulle curve erano posti in questa forma: un esempio è la curva *brachistocrona*, il percorso da un punto A ad un punto B non allineati verticalmente lungo il quale un corpo sottoposto alla sola gravità scenderebbe nel minor tempo. Si deve minimizzare quindi la funzione che rappresenta il tempo fra tutte le curve da A a B.

Il calcolo delle variazioni

- Il **calcolo delle variazioni** (nome dato da Eulero nel 1766) si occupa della ricerca dei punti estremali (massimi e minimi) dei **funzionali** e delle loro proprietà.
- Tali *funzionali* possono per esempio essere formulati come integrali che coinvolgono una funzione incognita e le sue derivate.

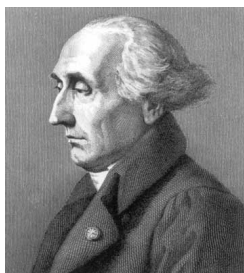
Lagrange

Lagrange

- “È estremamente lusinghiero per me avere come mio successore a Berlino il più illustre geometra del nostro secolo” scriveva Eulero a Lagrange nel 1775

Lagrange

- **Luigi Lagrange**
- (1736-1813) è italiano, nasce a Torino in una famiglia di origine francese. A 19 anni, anche se sprovvisto di un curriculum regolare di studi matematici viene nominato come insegnante nelle RR. Scuole di Artiglieria



Lagrange

- Per il troppo lavoro mangia irregolarmente e acquisisce una patologia allo stomaco che lo costringerà per tutta la vita ad un severo regime alimentare. Insegna a Torino dove fonda un istituto che diventerà presto l'Accademia delle Scienze di Torino

Lagrange

- Alla partenza di Eulero dall'Accademia di Berlino Eulero stesso e D'Alembert consigliano il re Federico II di Prussia di chiamare proprio Lagrange, e il re lo invita dicendo che “è bene che il più grande dei geometri stia vicino al più grande dei re”.

Lagrange

- A Berlino resta per 20 anni. Fa venire una giovane parente da Torino e la sposa, ma non ha figli (dichiara anche di non volerne). La moglie si ammala di deperimento e lui la assiste amorosamente; alla sua morte trova consolazione nel lavoro; ha però un periodo di affaticamento

Lagrange

- Nel 1787 accetta il posto all'Accademia delle Scienze di Parigi, che non lo obbliga all'insegnamento, e qui rimane per il resto della sua vita. Viene accolto benissimo, ha un appartamento al Louvre, il re Luigi XVI e la regina Maria Antonietta lo stimano. Ma all'inizio è in crisi depressiva, vuole abbandonare la matematica

Lagrange

- Da questa apatia totale lo svegliano due cose: una giovinetta e la rivoluzione. La giovane aveva circa quarant'anni meno di lui, ma ne fu affascinata e lo volle sposare e si dedicò totalmente a lui. Fu un'unione felicissima.
- La rivoluzione all'inizio ebbe grande rispetto per lui, che si teneva fuori dalla partecipazione alla politica

Lagrange

- Tuttavia nel 1793 una legge ne ordina l'arresto e la confisca dei beni in quanto nato in un paese nemico. Un suo amico, il chimico Lavoisier, interviene affinché per Lagrange venga fatta un'eccezione. L'anno successivo, dopo un processo durato meno di un giorno, Lavoisier viene ghigliottinato. Laplace dirà: "C'è voluto un giorno per far cadere questa testa, ci vorranno cento anni per averne una uguale."

Lagrange

- È posto a capo della École Normale Supérieure appena fondata dal Direttorio. Scrive testi universitari per studenti; Fourier, che è suo studente, non avrà una grande impressione delle sue capacità comunicative. Napoleone lo decora con la Legion d'Onore e lo nomina conte dell'impero. Muore di un collasso nel 1813.

Lagrange

- Lagrange giovane ritrova alcune serie già note come quella del binomio di Newton e del differenziale n -simo del prodotto di due fattori xy . Nello studio dei massimi e minimi condizionati inventa il metodo dei *moltiplicatori*, riducendo così il problema condizionato ad un problema di massimo o minimo libero

Lagrange

- Lagrange è il primo ideatore del **calcolo delle variazioni**.
- Ne aveva scritto, ancora diciottenne, ad Eulero, di cui aveva letto l'opera *Methodus maximorum et minimorum*, ed Eulero gli aveva risposto "con una onorevolissima lettera" esortandolo a continuare su tale argomento su cui c'era ancora molto da approfondire

Lagrange

- Eulero anzi ritarderà la pubblicazione di certi risultati raggiunti anche da Lagrange perché a Lagrange venisse attribuito indiscutibilmente il merito.

Lagrange

- Un problema di calcolo delle variazioni nella sua forma più semplice è: determinare una funzione $y = f(x)$ che renda massimo (o minimo) il funzionale

$$\int_a^b g(x,y) dx$$

Lagrange

- Lagrange si occupa di meccanica analitica, meccanica celeste, calcolo infinitesimale, equazioni differenziali, calcolo delle probabilità, teoria dei numeri.
- La sua opera più importante è *Mécanique analytique* (Parigi, 1788) in cui riduce l'intera meccanica ad un complesso di equazioni differenziali alle derivate parziali, che prendono il nome di **equazioni di Eulero-Lagrange**

Lagrange

- Lagrange si occupa del problema dei due corpi e poi dei tre corpi, vincendo il premio dell'accademia di Parigi, considerando il sistema Sole-Terra-Luna. Un altro premio vinse studiando il moto di Giove e dei suoi satelliti (allora ne erano conosciuti quattro)

Lagrange

- Nel problema dei tre corpi, i **punti di Lagrange**, tecnicamente chiamati **punti di oscillazione**, sono quelle posizioni nello spazio nell'ipotesi semplificativa in cui uno dei corpi abbia massa molto inferiore agli altri due, in cui le forze che agiscono sull'oggetto minore si bilanciano, creando una situazione di equilibrio. Lagrange nel 1772 ne calcolò la posizione

Lagrange



- I cinque punti di Lagrange nel sistema Sole-Terra-Luna. L_1 , L_2 ed L_3 sono punti di sella del potenziale gravitazionale, mentre gli altri due sono di massimo o di minimo

Lagrange

- Lagrange si occupa anche di analisi ed è importante il suo trattato *Théorie des fonctions analytiques* (1797) che nel sottotitolo annuncia che “i teoremi non fanno uso dell’infinitamente piccolo, né delle quantità evanescenti, né dei limiti o delle flussioni”, ma tutto è ricondotto alle quantità finite.

Lagrange

- Lagrange cerca di liberarsi del concetto di infinitamente piccolo che invece permeava l’opera di L’Hôpital.
- Risente della critica, fatta anche da Rolle, del fatto contraddittorio che il differenziale leibniziano era considerato qualcosa che variava (cioè che tendeva a 0 con x) e anche una monade invariabile

Lagrange

Si affida quindi alla trattazione delle funzioni viste come sviluppi in serie di potenze del tipo

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots$$

dove gli a_i dipendono da x_0 ma non da h , in verità senza preoccuparsi della convergenza della serie e delle condizioni di sviluppabilità (esistenza delle derivate)

Lagrange

Lagrange riesce ad evitare il passaggio al limite perché, essendo il secondo membro un polinomio $P(h)$, può dividere per h ottenendo

$$a_1 + h(Q(h)) \quad \text{con } Q(h) \text{ polinomio}$$

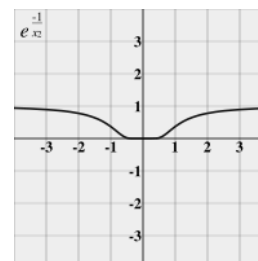
e dopo porre $h = 0$

Lagrange

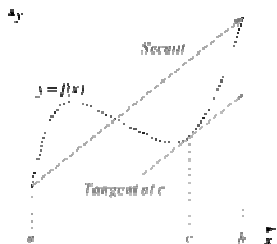
- In realtà questa liberazione dal passaggio al limite è fittizia, perché per il calcolo dei coefficienti del polinomio c’è pur sempre bisogno di calcolare derivate... (il termine “derivata” nasce con Lagrange, come pure “primitiva”).

Lagrange

- Inoltre non tutte le funzioni, anche se hanno tutte le derivate, si possono sviluppare in serie di Taylor
- Grafico di e^{-1/x^2}



Lagrange



- È di questo periodo il “teorema del valor medio”, che poi diventerà essenziale per garantire che se su un intervallo è sempre $f'(x) = 0$ la f è costante

Lagrange

- Del pari di questo periodo è il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (ripreso poi da Cauchy) per determinare un integrale particolare di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti

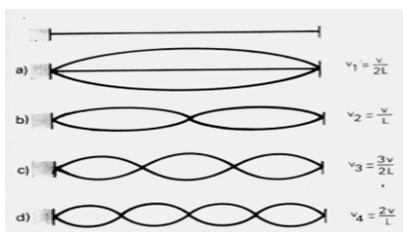
Lagrange

- Supponiamo di avere l'equazione del 2° ordine $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$
- e che $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ sia l'integrale generale della omogenea associata.
- Allora si considera una funzione del tipo $v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$ e si determinano i coefficienti $v_1(x)$ e $v_2(x)$ in modo tale che $v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$ sia una soluzione dell'equazione di partenza

Il problema della corda vibrante

- Al problema della corda vibrante, cioè di come si propagasse su una corda un'energia dovuta allo spostamento dalla sua posizione di quiete, si dedicarono vari matematici, tra cui Eulero, Lagrange e D'Alembert

Il problema della corda vibrante



Il problema della corda vibrante

- 1) Il numero delle vibrazioni è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda: più lunga è la corda, meno alto è il suono.
- 2) Il numero delle vibrazioni è inversamente proporzionale al diametro della corda: più spessa è la corda, meno alto è il suono.

Il problema della corda vibrante

- 3) Il numero delle vibrazioni è direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione: più tesa è la corda, più alto è il suono.
- Se ad esempio una corda è tesa 4 volte più di un'altra, essa produrrà un suono 2 volte più alto (2 è la radice quadrata di 4).

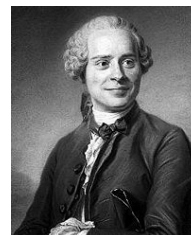
Il problema della corda vibrante

- 4) Il numero delle vibrazioni è inversamente proporzionale alla radice quadrata della densità: più la corda è densa, meno alto è il suono.
- Se ad esempio una corda è di un materiale 4 volte più denso di un altro, essa produrrà un suono 2 volte più grave.

D'Alembert

D'Alembert

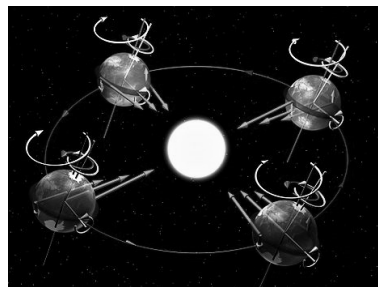
- **Jean Baptiste Le Ronde D'Alembert** (1717-1783), matematico, fisico, filosofo, enciclopedista, astronomo. Scrisse oltre un migliaio di articoli per la *Encyclopédie* che aveva fondato con Diderot, e il cui primo volume uscì nel 1751.



D'Alembert

- Determina per primo la soluzione completa della precessione degli equinozi, come pure dimostra, sia pure in maniera tutt'altro che convincente, il teorema fondamentale dell'algebra.

D'Alembert - precessione



D'Alembert

- Risolve il problema della corda vibrante osservando che una corda in vibrazione può assumere infinite forme oltre quella sinusoidale, tutte descritte dall'equazione

$$\partial^2 y / \partial t^2 = a^2 \partial^2 y / \partial x^2$$

Con un artificio, nel caso $a=1$, riesce ad integrarla, trovando una soluzione generale:

D'Alembert

$$y(t,x) = \frac{1}{2} f(t+x) + \frac{1}{2} f(t-x)$$

dove $f(x)$ è una funzione arbitraria che esprime la posizione iniziale della corda. La f deve avere un'espressione analitica unica che indica la continuità della curva descritta dalla corda

Questa soluzione con una funzione arbitraria contribuisce a far evolvere il concetto di funzione verso una maggiore generalità

D'Alembert (criterio del rapporto)

- Sia $\sum_n u_n$ una serie a termini strettamente positivi e sia $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n = L$. Allora:
- se $L < 1$: la serie di termine generale u_n converge.
- se $L > 1$: la serie di termine generale u_n diverge.
- (se $L=1$: non si può concludere)

Il teorema fondamentale dell'algebra

- Teor. - Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ammette sempre uno zero complesso.
- Cor. - Un'equazione polinomiale (ovvero formata da un polinomio eguagliato a zero, in una variabile) di grado n ammette sempre n soluzioni in campo complesso, tenuto conto che alcune possono essere multiple.

Il teorema fondamentale dell'algebra

- Questo teorema fu affrontato, con dimostrazioni diverse e non corrette o non complete, da D'Alembert (1746), Eulero (1749), Lagrange (1772), Laplace (1795). Finalmente una dimostrazione corretta fu fatta da Gauss (1799) e poi una molto più semplice da Jean Robert Argand (1814)

Laplace

Laplace

- **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827)
- Di umili (e non note) origini, fu fatto studiare da alcuni protettori, si dedicò principalmente alla meccanica celeste



Laplace

- Non prese parte alla rivoluzione, fece parte del Comitato di Pesi e Misure, fu nominato conte da Napoleone e poi marchese dai Borboni. Napoleone lo fece ministro, ma dopo pochi mesi disse che “Laplace aveva introdotto lo spirito dell’infinitamente piccolo nella direzione degli affari”

Laplace

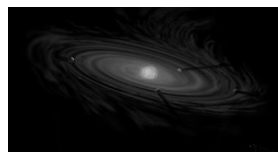
- Ambizioso, opportunista, guarda con superiorità i colleghi ed è apprezzato sotto tutti i regimi.
- Nel 1773 dimostra la stabilità del sistema solare, applicando la teoria gravitazionale di Newton all’intero sistema, comprese le perturbazioni (il sistema è idealizzato, ad esempio sono trascurate le maree che frenano il moto di rotazione)

Laplace

- Scrive pochi trattati, ma molto ponderosi; il suo *Traité de Mécanique céleste* in edizioni e ampliamenti successivi esce in cinque volumi dal 1799 al 1825.
- Espone un’ipotesi sulla formazione del sistema solare, già proposta da Kant

Laplace

- Rappresentazione dell’ipotesi di Kant-Laplace: una unica nebulosa da cui nasce il sistema solare (ipotesi accettata ancora adesso con qualche precisazione)



Laplace

- Laplace intuì il concetto di buco nero, corpo celeste di massa così grande che nemmeno la luce avrebbe velocità superiore a quella di fuga. Ipotizzò inoltre che alcune delle nebulose mostrate dai telescopi non facessero parte della Via Lattea e fossero esse stesse delle galassie. Questo fatto verrà confermato da Hubble nel 1924.

Laplace

- 1812: *Théorie analytique des probabilités* : “la teoria della probabilità è soltanto senso comune espresso in numeri”
- In quest’opera si trova il calcolo dell’area della gaussiana come viene raccontata adesso; vi sono numerosi integrali di funzioni estremamente complicate

Laplace

- Ancora nella *Théorie analytique des probabilités* si trova la “trasformata di Laplace” (però soltanto con x reale)
- La differenza tra Laplace e Lagrange è stata ben descritta da Fourier: Lagrange è un matematico per cui la fisica è un’occasione, Laplace è un astronomo per cui la matematica è un mezzo

Laplace

- Laplace chiude un’epoca: tutto quello che si poteva dire sulla meccanica celeste di modello newtoniano tramite il calcolo differenziale e integrale è detto. È un fautore del determinismo più rigoroso.

Gauss

Gauss

- **Carlo Federico Gauss** (1777-1855), astronomo, matematico, fisico. Portò il suo contributo in numerose branche di queste discipline



Gauss

- Si racconta che a quattro anni abbia corretto un errore nei calcoli del padre, e che ancora alle elementari abbia scoperto la regola per eseguire la somma di una progressione aritmetica.
- Studiò a Göttingen e si addottorò con una tesi che dimostrava il teorema fondamentale dell’algebra

Gauss

- Ebbe tre figli dalla prima moglie che morì giovane, ed altri tre dalla seconda. Passò periodi di depressione, pubblicava poco perché voleva sempre rifinire calcoli e ragionamenti (*pauca sed matura*), per cui numerose sue scoperte rimasero ignote e furono riscoperte e pubblicate da altri.

Gauss

- Poté giovare a lungo del mecenatismo del duca di Brunswick, che però morì nel 1806 per le ferite riportate in una disfatta disastrosa contro Napoleone. Non avendo entusiasmo per l'insegnamento cercò e trovò un posto fisso come direttore dell'osservatorio di Göttingen e lì rimase sempre, salvo un breve viaggio a Berlino.

Gauss

- Tenne per molti anni in casa la madre a cui era affezionatissimo; dei sei figli uno morì giovanissimo, altri emigrarono perché in disaccordo col padre.

Gauss

- La sua tesi di dottorato è del 1799; nel 1801 esce *Disquisitiones arithmeticae*, in cui sono esposti vari teoremi di teoria dei numeri, ad esempio è dimostrata l'unicità della scomposizione in fattori primi (nota dai tempi di Archimede).

Gauss

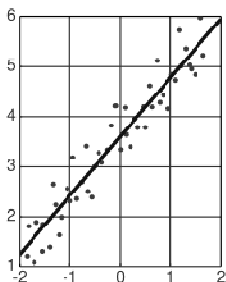
- Vi è anche esposta l'algebra delle congruenze (due numeri interi a e b sono congruenti modulo q se divisi per q danno lo stesso resto).
- Quest'algebra ha varie proprietà interessanti, ad esempio non vale la legge di annullamento del prodotto

Gauss

- Sulla copertina di un manuale dei logaritmi si trova scritta da Gauss questa intuizione: il numero dei numeri primi minori di a tende ad $a/\log a$ per $a \rightarrow \infty$
- Nel 1801 l'astronomo Piazzi scopre il pianetino Cerere, che però viene occultato dalla Luna; Gauss ne determina il punto di nuova apparizione col metodo dei minimi quadrati

Gauss

- Applicazione del metodo dei minimi quadrati nel caso lineare

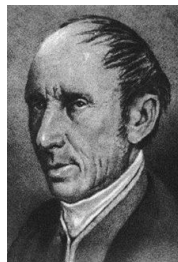


Gauss

- Gauss si occupa di curvatura di superfici; scrive anche, ma non pubblica, su un modello di geometria non euclidea che verrà invece pubblicato, indipendentemente, da Janos Bolyai

Cauchy

Cauchy



- **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) introduce nell'analisi un rigore non prima conosciuto. Dà corpo alla teoria dei limiti, produce oltre 800 lavori

Cauchy

- È un ingegnere militare alla Scuola di Ponti e Strade, cattolico, assolutista; diventa membro dell'Accademia quando Monge ne viene espulso, nel 1830 segue il "suo" re Carlo X in esilio, viene a Torino, va a Praga e tornerà a Parigi solo nel 1838

Cauchy

- Nel 1812 Cauchy presenta all'Istituto di Francia una memoria sui determinanti, che si basa sulle sostituzioni circolari; nel 1815 utilizza i determinanti per calcolare il volume del parallelepipedo e nella stessa memoria risolve un problema relativo alla propagazione delle onde tramite un determinante che coinvolge le derivate parziali di una funzione di due variabili:

Cauchy

- È quello che adesso chiamiamo jacobiano. Jacobi userà questo determinante soltanto a partire dal 1829.
- A partire dal 1814 Cauchy riempie il *Journal* dell'École Polytechnique e i *Comptes rendus* dell'Accademia con memorie sempre più lunghe sulla variabile complessa

Cauchy

- 1821: esce il *Traité d'analyse*. Vi compare tutta l'analisi presentata tramite la teoria dei limiti, la continuità, la differenziabilità, mentre viene rifiutato il metodo di Lagrange basato sulla serie di Taylor. Come definizione di limite dà (quasi) quella che si dà ora, e così della continuità.

Cauchy

- La definizione di derivata è quella principale del calcolo differenziale, e quindi il differenziale in sé diventa secondario (a differenza di quanto era per Leibniz)
- Cauchy propone la definizione di integrale definito come quella odierna, salvo il fatto che calcola la funzione sempre nel primo estremo dei sottointervalli

Cauchy

- Numerosi teoremi da analisi reale e complessa sono attribuiti a Cauchy; anche se non ne fu lui il primo scopritore, certo ne fu il divulgatore e colui che li collocò in un'opera completa e coerente. Percepì chiaramente non solo la convergenza delle serie di funzioni, ma anche il concetto di uniforme convergenza

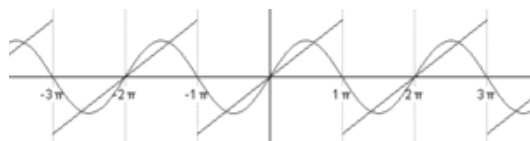
Cauchy

- A Cauchy, come a Gauss, Lagrange, Laplace furono tributati onori di ogni genere, dei quali ciascuno si fregiò secondo la sua sensibilità

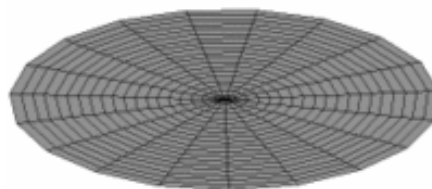
Altri matematici della prima metà dell'Ottocento

- Quasi schiacciati tra matematici più famosi accenniamo qui a tre personaggi a cui la vita non riservò soltanto successi.
- **Jean-Joseph Baptiste Fourier** (1768-1830) si occupò principalmente della diffusione del calore e propose come soluzione dell'equazione relativa funzioni che erano espresse tramite serie trigonometriche.

Fourier



La serie di Fourier



I problemi dei fondamenti

Geometrie non euclidee

Geometrie non euclidee - Bolyai

- **Janos Bolyai** (1802-1860), ungherese, figlio di Farkas, anch'egli matematico e amico di Gauss; studente eccellente, il migliore schermidore e ballerino dell'esercito ingegnere, ufficiale del Genio, precocemente in pensione



Geometrie non euclidee - Bolyai

- Ebbe forti contrasti con il padre; ebbe due figli da una donna che non poté sposare subito perché la pensione era troppo esigua; la sposò dopo il 1848 in quanto la legge cambiò perché l'Ungheria aveva acquisito l'indipendenza; dopo due anni i due si lasciarono, e i rapporti di Bolyai con il padre migliorarono.

Geometrie non euclidee - Bolyai

- Morì di polmonite; una università a Cluij, sua città natale ora in Romania fu fondata con il suo nome nel 1945, ma fu chiusa dal regime di Ceausescu nel 1959.

Geometrie non euclidee - Bolyai

- Propose nel 1831 una geometria in cui non era valido il postulato delle parallele; ad una lettera del padre a Gauss, questi rispose che ci aveva già pensato da trent'anni (infatti c'è una sua lettera del 1824 in cui dichiara di aver costruito per proprio diletto una geometria in cui la somma degli angoli di un triangolo è minore di un angolo piatto)

Geometrie non euclidee - Bolyai

- La risposta di Gauss gettò Bolyai in una forte depressione. Quando poi scoprì che il russo Lobacevskij aveva avuto le stesse idee e le aveva già pubblicate nel 1829, la depressione peggiorò e si mise in pensione dall'esercito. Non scrisse più nulla di matematica e provò a costruire una teoria della conoscenza universale.

Geometrie non euclidee - Bolyai

- Nel 1832 ideò una lingua universale basata sull'ungherese.
- Scrisse solo poche pagine, ma lasciò oltre 20.000 pagine di manoscritti.

Geometrie non euclidee - Lobacevskij

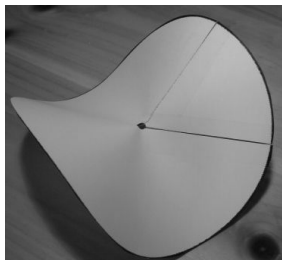


Geometrie non euclidee - Lobacevskij

- **Nicola Lobacevskij** (1792-1856) ebbe tutta la sua vita nell'università di Kazan, di cui fu anche rettore per 19 anni. Ebbe sette figli, ma cadde in forte depressione per la morte del primogenito: l'importanza delle sue scoperte non fu compresa subito, egli fu di fatto pensionato forzatamente e terminò la sua vita in povertà

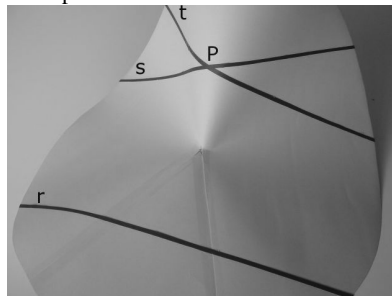
Geometrie non euclidee

- Si prende una superficie a sella e si chiamano *rette* le intersezioni di tale superficie con un piano



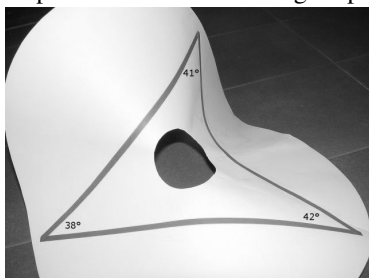
Geometrie non euclidee

- In una superficie a sella le rette t ed s passano entrambe per P e non incontrano la retta r



Geometrie non euclidee

- La somma degli angoli di un triangolo in una superficie a sella è $<$ un angolo piatto



Geometrie non euclidee - Riemann

- Nel 1851 **Bernard Riemann** (1826-1866) nella sua tesi di abilitazione propone una geometria non euclidea in cui non esiste parallelismo



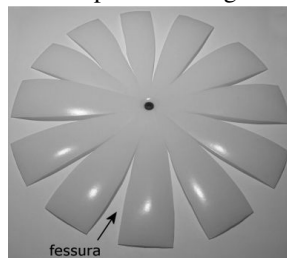
Geometrie non euclidee

- Superficie sferica



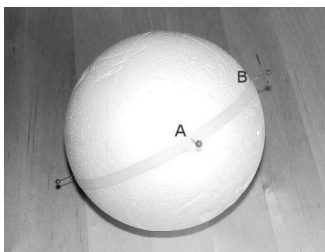
Geometrie non euclidee

- Una superficie sferica *non* è sviluppabile su un piano senza operare dei tagli



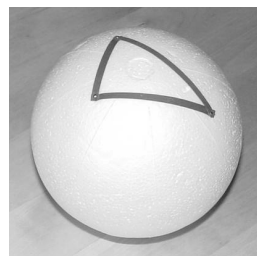
Geometrie non euclidee

- In una superficie sferica si dice *retta* una circonferenza massima



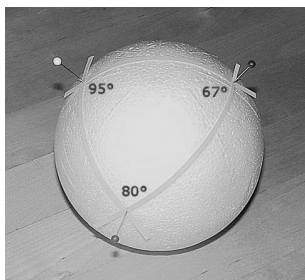
Geometrie non euclidee

- Triangolo su una superficie sferica, limitato da archi di circonferenza massima



Geometrie non euclidee

- In una superficie sferica la somma degli angoli di un triangolo è $>$ di un angolo piatto



Geometrie non euclidee

- Superficie in parte a sella e in parte sferica

