STORIA DELLA MATEMATICA
Prof. Carlo Minnaja

Lezioni per studenti del Corso di Laurea in Matematica
2ª settimana

Moltiplicazione nella matematica egiziana

- 13 x 32: si raddoppia sistematicamente il primo fattore e si dimezza sistematicamente il secondo; si prende l'ultimo numero dei fattori raddoppiati, corrispondente al numero 1 dei fattori dimezzati
- Questo è il prodotto: 416

Moltiplicazione nella matematica egiziana

- 32 x 13
- Si procede come nel caso precedente; questa volta nelle colonna dei dimezzamenti compaiono dei numeri dispari; si continua a dimezzare trascurando il resto
- Quindi si sommano tutti i numeri della colonna dei raddoppi che corrispondono a numeri dispari nella colonna dei dimezzamenti

Moltiplicazione nella matematica egiziana

- Risulta:
- 32 + 128 + 256 = 416

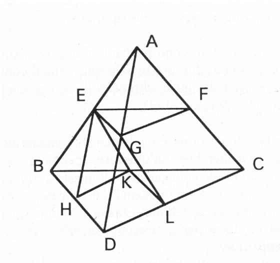
Democrito

- **Democrito** dimostrò (cosa nota agli egizi quattordici secoli prima) che il volume di una piramide è uguale a 1/3 di quello di un prisma di uguale base e uguale altezza
- probabilmente egli arrivò alla dimostrazione utilizzando un procedimento di limite o di somma di una serie

Democrito

- Consideriamo una piramide a base triangolare, con vertici della base B, C, D e vertice A, e il prisma avente la stessa base e la stessa altezza.
- Sia P il volume del prisma

Democrito



Democrito

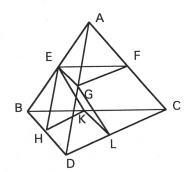
- Chiamiamo ora E, F, G, H, K, L i punti medi dei rispettivi spigoli, consideriamo i due prismi di vertici rispettivamente KLCEGF e DLGHKE (il cui volume è un quarto del volume P del prisma che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide) e i due tetraedri EGFA e EHKB

Democrito

- Scomponiamo ciascuno di questi tetraedri ancora con lo stesso sistema, cioè a loro volta in due prismi e in due tetraedri, e procediamo all'infinito sui singoli tetraedri che ogni volta rimangono oltre ai due prismi; otteniamo quanto segue

Democrito

$$V = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4^2}P + \frac{1}{4^3}P + \ldots = P \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)$$



Per provare la tesi, ovvero che $V = \frac{1}{3} \cdot P$ sarebbe ora necessario affermare (in termini moderni) che:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$$

Democrito

- Non è certo che Democrito abbia effettuato una dimostrazione rigorosa di questo fatto, cioè che conoscesse la convergenza di una serie geometrica; è invece probabile che egli abbia dimostrato quella uguaglianza tramite il metodo di esaustione

Democrito

Proposizione. $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$.

□ *Dimostrazione.*

- Constatiamo innanzitutto che è impossibile che sia: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} > \frac{1}{3}$.

Per il lemma precedente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} > \frac{1}{3} \Rightarrow 4^n - 1 > 4^n$$

e ciò è assurdo.

- Dimostriamo quindi (con il metodo di esaustione) che è impossibile che

sia: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} < \frac{1}{3}$. Se infatti così fosse, consideriamo $A < \frac{1}{3}$ tale che: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = A$.

Sottraiamo progressivamente a $\frac{1}{3}$ i termini della serie geometrica:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots:$$

Otteniamo:

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ dove $\frac{1}{4}$ è maggiore di $\frac{1}{3}:2$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$ dove $\frac{1}{16}$ è maggiore di $\frac{1}{12}:2$

$\frac{1}{48} - \frac{1}{64} = \frac{1}{192}$ dove $\frac{1}{64}$ è maggiore di $\frac{1}{48}:2$

Democrito

ed in generale:

$$\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}-\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3\cdot 4^n}$$

dove $\frac{1}{4^n}$ è maggiore di $\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}:2$

essendo: $\frac{1}{4^n}>\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}:2 \Leftrightarrow 4<3\cdot 2$
(applicando il lemma precedente).

Proseguiamo così indefinitamente: possiamo concludere, in base alla proprietà di esaustione, che la quantità:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\ldots=\frac{1}{3}-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}$$

può essere resa minore di qualsiasi quantità scelta a piacere. Ad esempio:

$$\frac{1}{3}-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}<\frac{1}{3}-A \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}>A$$

Ma ciò è assurdo, in quanto avevamo ammesso: $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}=A$.

- Avendo provato l'impossibilità sia di $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}<\frac{1}{3}$, sia di $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}>\frac{1}{3}$, non ci

resta che concludere con la tesi, ovvero affermare che: $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{3}$. ■

Archimede

- Il *corpus* di Archimede (pervenutoci, secondo la classificazione di Heiberg):
- **Sulla sfera e il cilindro**

2 libri: la sfera ha volume 2/3 del volume del cilindro circoscritto; l'area della superficie sferica è 4 volte il cerchio massimo

- **Misura del cerchio**

L'area del cerchio è uguale a quella del triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata; il rapporto tra la circonferenza e il diametro è compreso tra 3+ 10/71 e 3 + 10/70

Archimede

- **Sui conoidi e sferoidi**

Si tratta di paraboloidi, iperboloidi ed ellissoidi: il volume del paraboloide di rivoluzione è i 3/2 del cono avente stessa base e stessa altezza

- **Sulle spirali**

La "spirale di Archimede" è definita come il percorso di un punto che si muove di moto rettilineo uniforme su una retta che a sua volta si muove di moto circolare uniforme

Archimede

- **Sull'equilibrio dei piani**

2 Libri - Legge della leva e determinazione del baricentro di alcune figure piane: parallelogramma, triangolo, trapezio, segmento di parabola

- **Arenario**

È presentato un sistema di numerazione che consente di esprimere numeri grandissimi, ad esempio il numero dei granelli di sabbia che ci possono essere nell'universo

Archimede

- **Quadratura della parabola**
- La parabola è i 4/3 del triangolo avente uguale base e uguale altezza
- **Sui galleggianti**
- 2 libri: è presentato il "principio di Archimede" insieme a condizioni di equilibrio di solidi geometrici immersi in liquidi

Archimede

- **Stomachion**

È proposta una specie di *tangram*: si tratta di dividere un rettangolo in quattordici parti

- **Sul metodo meccanico**

Trattato scritto sotto forma di lettera ad Eratostene, che illustra il metodo euristico applicato a numerosi casi (quadratura della parabola, segmenti sferici, conoidi ecc.); in particolare è trattata l'unghia cilindrica e l'intersezione di due cilindri iscritti in un cubo

Archimede

- **Libro dei lemmi**

Ci è pervenuta solo una parafrasi araba, e tratta figure ottenibili come intersezioni di cerchi

Archimede

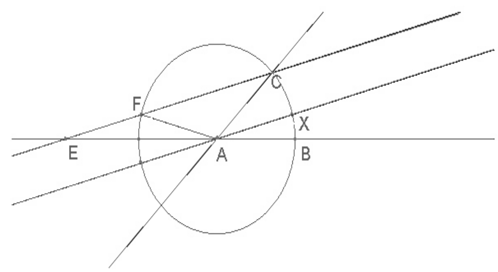
- **Il problema dei buoi**

Il libro, una volta interpretatene le trascrizioni, propone il problema di trovare il numero dei buoi (e giovenche) del Sole che pascolano nella Trinacria, che sono di quattro colori di pellame (bianco, nero, bruno e screziato), quando se ne sappiano le rispettive proporzioni e si sappia quali frazioni costituiscano quadrati perfetti e quali invece si possano mettere in un triangolo. Le soluzioni sono numeri di oltre 80 cifre!!!

Archimede

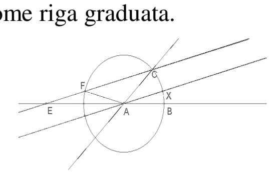
- Le proporzioni forniscono 8 equazioni di 1° grado (tori e giovenche di quattro colori), ma le ultime due condizioni, che il numero dei tori bianchi e neri sia un quadrato perfetto, e i bruni e gli screziati formino un numero triangolare porta il problema ad una complicazione notevolissima

Trisezione di un angolo



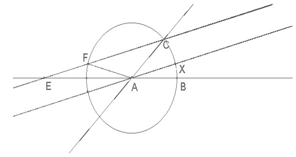
Trisezione di un angolo

- Nella soluzione proposta da Archimede la riga viene usata per riportare una lunghezza e quindi è pensata come riga graduata.



- Supponiamo di voler trisecare $C\hat{A}B$, disegniamo una circonferenza Γ, con centro in A e raggio r, la quale interseca la semiretta AC in C e la semiretta AB in B;

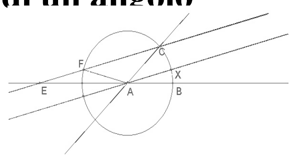
Trisezione di un angolo



per C tracciamo una retta che taglia la retta AB nel punto E e la circonferenza nel punto F in modo tale che EF sia uguale al raggio della circonferenza. Per A tracciamo la retta parallela a CE, la quale interseca la circonferenza in X. Dimostriamo che l'angolo $X\hat{A}B$ è la terza parte dell'angolo dato $C\hat{A}B$.

Trisezione di un angolo

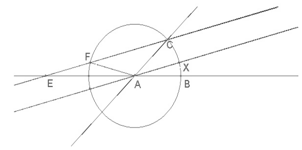
Hp: *EF =AF= AB= AC*
Th: *XÂB = 1/3 CÂB*



DIMOSTRAZIONE:

Per costruzione, i due triangoli EFA e CAF sono isosceli. In particolare il lato EF è uguale al lato AF perché si è presa la retta CE in modo tale che la distanza tra il punto di intersezione di tale retta con la retta AB e il punto di intersezione con la circonferenza fosse uguale al raggio; mentre il lato AF è uguale al lato AC perché entrambi raggi della stessa circonferenza.

Trisezione di un angolo



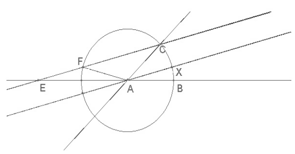
Inoltre l'angolo *CÂB* è angolo esterno del triangolo EAC e quindi

CÂB = FÊA + AĈF

A sua volta *AĈF* è uguale all'angolo *AFC*, che è angolo esterno del triangolo EFA e quindi

AFC = FÊA + FÂE = 2 FÊA

Trisezione di un angolo



Unendo le due relazioni precedenti si ottiene

CÂB = FÊA +2 *FÊA* = 3 *FÊA*

ovvero *FÊA* = 1/3 *CÂB*

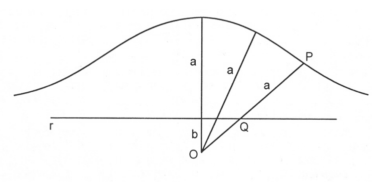
D'altronde EF // AX (tagliate dalla trasversale AB) e gli angoli *FÊA* e *XÂB* sono angoli corrispondenti e dunque

FÊA = XÂB

Confrontando le due relazioni precedenti si ricava

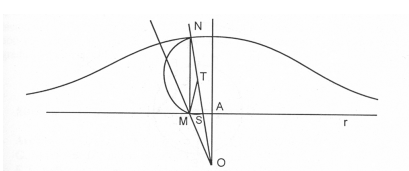
XÂB = 1/3 *CÂB*

Altri matematici greci - Nicomede



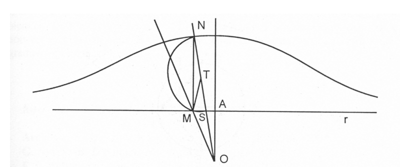
- **Nicomede** (ca. 280-210 a. C.)
- studiò la trisezione dell'angolo tramite la *concoide* (*a* e *b* sono costanti): $(x^2 + y^2)(x - b)^2 - a^2x^2 = 0$;
- in coordinate polari risulta: $\rho = \pm a + b/(\cos \theta)$

Altri matematici greci - Nicomede



- Supponiamo di voler trisecare l'angolo AÔM. Sia a = 2 OM; costruiamo una concoide tale che A sia la proiezione di O su r. Da M si conduca la parallela ad OA che incontra la concoide in N. Dimostriamo che è AÔN =AÔM /3.

Altri matematici greci - Nicomede



Infatti, sia S l'intersezione di AM e ON e T il punto medio di SN; il triangolo SMN è rettangolo e quindi iscrivibile in una semicirconferenza di diametro SN. Quindi TM = SN/2 = a/2 = OM.

Allora TOM è un triangolo isoscele e gli angoli in T e in O sono uguali e sono doppi dell'angolo in N, che è uguale all'angolo AÔN, che quindi risulta 1/3 di AÔM.

Il concetto di zero

- Attorno al 300 a.C. i babilonesi iniziarono a usare un semplice sistema di numerazione in cui impiegavano due cunei pendenti per marcare uno spazio vuoto. Comunque, questo simbolo non aveva una vera funzione oltre a quella di segnaposto. Sembra infatti che l'origine del segno **O** sia da attribuire alla forma dell'impronta lasciata sulla sabbia da un ciottolo tondo (o gettone) dopo essere stato rimosso (e quindi *mancanza* del numero).