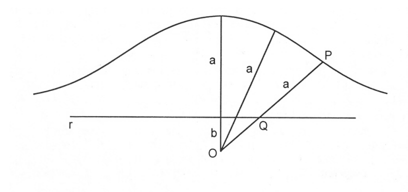
STORIA DELLA MATEMATICA
Prof. Carlo Minnaja

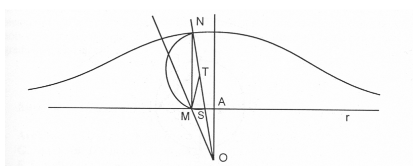
Lezioni per studenti del Corso di Laurea in Matematica
3ª settimana

Altri matematici greci - Nicomede



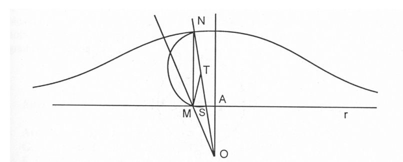
- **Nicomede** (ca. 280-210 a. C.)
- studiò la trisezione dell'angolo tramite la *concoide* (*a* e *b* sono costanti): $(x^2 + y^2)(x - b)^2 - a^2x^2 = 0$;
- in coordinate polari risulta: $\rho = \pm a + b/(\cos\theta)$

Altri matematici greci - Nicomede



- Supponiamo di voler trisecare l'angolo AÔM. Sia a = 2 OM; costruiamo una concoide tale che A sia la proiezione di O su r. Da M si conduca la parallela ad OA che incontra la concoide in N. Dimostriamo che è AÔN =AÔM /3.

Altri matematici greci - Nicomede



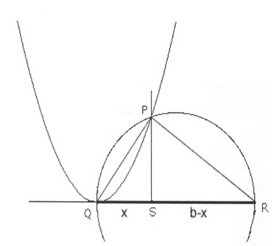
Infatti, sia S l'intersezione di AM e ON e T il punto medio di SN; il triangolo SMN è rettangolo e quindi iscrivibile in una semicirconferenza di diametro SN. Quindi TM = SN/2 = a/2 = OM.

Allora TOM è un triangolo isoscele e gli angoli in T e in O sono uguali e sono doppi dell'angolo in N, che è uguale all'angolo AÔN, che quindi risulta 1/3 di AÔM.

Il concetto di zero

- Attorno al 300 a.C. i babilonesi iniziarono a usare un semplice sistema di numerazione in cui impiegavano due cunei pendenti per marcare uno spazio vuoto. Comunque, questo simbolo non aveva una vera funzione oltre a quella di segnaposto. Sembra infatti che l'origine del segno **O** sia da attribuire alla forma dell'impronta lasciata sulla sabbia da un ciottolo tondo (o gettone) dopo essere stato rimosso (e quindi *mancanza* del numero).

Equazione di terzo grado - Kayyam



Data l'equazione:

$x^3+Ax=B$ (1)

con A e B positivi, si riscrive nella forma

$x^3+a^2x=a^2b$ (2)

con $a^2=A$ (3) e $a^2b=B$ (4)

Si costruisce una parabola la cui equazione è data da:

$x^2=ay$ (5)

Equazione di terzo grado - Kayyam

- A partire dal vertice della parabola, tracciamo una semicirconferenza di diametro pari a *b*.
- Risulta $x^2 = QS^2 = a\,PS$ da cui
- $a/x = x/PS$
- L'altezza del triangolo PQR è media proporzionale tra le proiezioni QS e SR e quindi
- $x/PS = PS/(b-x)$

Equazione di terzo grado - Kayyam

- Dalle due ultime equazioni segue
- $a/x = PS/(b-x)$;
- Peraltro $PS = x^2/a$ e sostituendo questo valore nell'equazione precedente si ritrova l'equazione di partenza; pertanto x è la soluzione

Equazione di terzo grado - Kayyam

Kayyam prospetta anche la soluzione di un'equazione generica di terzo grado

$$x^3+ax^2+b^2x+c^3=0$$

Si sostituisce il termine x^2 con 2py, ottenendo : $2pxy+2apy+b^2x+c^3=0$.

Tale equazione rappresenta una iperbole mentre $x^2=2py$ rappresenta una parabola; tracciando le due curve nello stesso sistema di riferimento, le ascisse dei punti di intersezione delle due curve sono le radici dell'equazione di terzo grado data.

Tuttavia non essendoci la concezione dei numeri negativi, non tutte le soluzioni venivano considerate.

Equazione terzo grado - Tartaglia

Quando chel cubo con le cose appresso	$x^3 + px$
se agguaglia à qualche numero discreto	$= q$
trovan dui altri differenti in esso.	$u-v=q$
Dapoi terrai questo per consueto	
Che'l lor produtto sempre sia eguale	$uv=$
Al terzo cubo delle cose neto,	$(p/3)^3$
El residuo poi suo generale	
delli lor lati cubi ben sottratti	$u^{1/3} - v^{1/3}$
Varra la tua cosa principale...	$= x$

Equazione terzo grado - Cardano

Dall'*Ars Magna* (1545)

$$x^3 + mx = n$$

(il cubo più la cosa uguale a numero)

I coefficienti sono da considerarsi tutti positivi.

Siano t ed u due numeri, entrambi positivi, tali che

$$\begin{cases} t - u = n \\ tu = (\frac{m}{3})^3 \end{cases}$$

Sia adesso

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u} = t^{1/3} - u^{1/3}$$

ed elevando al cubo entrambi i membri abbiamo

$$x^3 = (t^{1/3} - u^{1/3})^3 = t - 3t^{2/3}u^{1/3} + 3t^{1/3}u^{2/3} - u =$$
$$= (t - u) - (3t^{1/3}u^{1/3})(t^{1/3} - u^{1/3}) = n - mx$$

di qui si ha

$$x^3 + mx = n.$$

Ma il sistema lo si sa risolvere per u e v in termini di n ed m. Infatti

(1) $$u = t - n$$

e quindi

$$t(t - n) = (m/3)^3.$$

1

Equazione terzo grado - Cardano

Arriviamo quindi ad un'equazione di II grado

$$t^2 - nt - (m/3)^3 = 0.$$

La soluzione è dunque, poiché deve essere $t > 0$,

$$t = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4(m/3)^3}}{2} = \frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}$$

e considerando $t - n$ si ha per u:

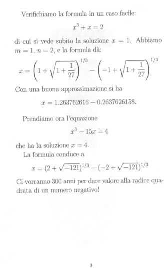
$$u = -\frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}$$

Sostituendo in (1) abbiamo la soluzione per x:

$$x = \left(\frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}\right)^{1/3}$$
$$-\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}\right)^{1/3}.$$

2

Equazione terzo grado - Cardano



Verifichiamo la formula in un caso facile:

$$x^3 + x = 2$$

di cui si vede subito la soluzione $x = 1$. Abbiamo $m = 1$, $n = 2$, e la formula dà:

$$x = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27}}\right)^{1/3} - \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27}}\right)^{1/3}$$

Con una buona approssimazione si ha

$$x = 1.263762616 - 0.2637626158.$$

Prendiamo ora l'equazione

$$x^3 - 15x = 4$$

che ha la soluzione $x = 4$.

La formula conduce a

$$x = (2 + \sqrt{-121})^{1/3} - (-2 + \sqrt{-121})^{1/3}$$

Ci vorranno 300 anni per dare valore alla radice quadrata di un numero negativo!

3

Equazione terzo grado - Cardano

- Esaminiamo l'equazione $x^3 = 9x + 10$
  che ha tre soluzioni reali
  $x = -2$, $x = 1-\sqrt{6}$, $x = 1 + \sqrt{6}$
- Però applicando la formula risolutiva ci si imbatte in $\sqrt{-2}$
- Tale situazione veniva detta *caso irriducibile*

La regola di Scipione Dal Ferro

- La regola di Dal Ferro era espressa così:
- *Quando le cose et li cubi si uguagliano al numero* ($ax^3+bx=c$) *riduci l'equazione ad un cubo* ($x^3+px = q$) *partendo per la quantità delli cubi* (dividendo per il coefficiente del termine di 3° grado), *poi cuba la terza parte delle cose* ($(p/3)^3$), *poi quadra la metà del numero* ($(q/2)^2$),

La regola di Scipione Dal Ferro

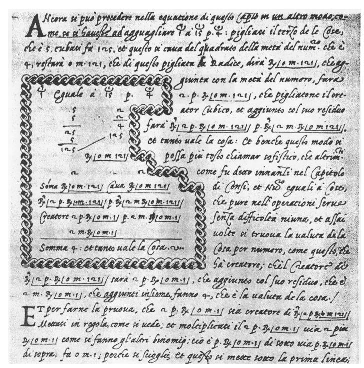
- *e questo summa con il detto cubato*
- $((p/2)^2 + (p/3)^3)$, *et la radice di detta summa più la metà del numero fa un binomio*
- $(q/2+((p/2)^2+ (p/3)^3)^{1/2})$
- *et la radice cuba di tal binomio, men la radice cuba del suo residuo val la cosa*
- $[q/2+((p/2)^2+(p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} - [q/2-((p/2)^2+(p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} = x$

Una equazione di terzo grado

- Nel manoscritto di Bombelli si vedono le radici quadrate di numeri negativi (che poi nei calcoli riesce ad eliminare).
- Anche l'equazione studiata da Cardano, che questi non riesce a risolvere, è la stessa di Bombelli:

$$x^3 = 15x + 4$$

La formula di Bombelli



Una equazione di terzo grado

- La soluzione si trova, introducendo l'unità immaginaria, pur di saper operare la sostituzione

  $(m \pm i \sqrt{n})^{1/3} = u \pm iv$
- Soltanto Viète, nel 1591, riuscirà a risolvere l'equazione di terzo grado

  $$x^3 + px + q = 0$$

  con p e q negativi senza passare per le unità immaginarie, servendosi di un'identità trigonometrica