STORIA DELLA MATEMATICA
Prof. Carlo Minnaja

Lezioni per studenti del Corso di Laurea in Matematica
9-10a settimana

La matematica del Novecento

Gli ultimi decenni del XIX secolo

- Questo periodo vede, dopo un'evoluzione spinta dei metodi applicativi (trasformate di Fourier e di Laplace), un ripensamento su fondamenti. Si ripensa al concetto di funzione (Dirichlet), al concetto di insieme (Cantor), ai fondamenti dell'aritmetica (Frege).

Gli ultimi decenni del XIX secolo

- **Johann Dirichlet** (1805-1859), tedesco di origine francese, studia la convergenza delle serie di Fourier e cerca di dimostrare che ogni funzione si può scrivere come somma di una serie di Fourier

Dirichlet

- Dirichlet vuole così rispondere alle critiche di cui era stato oggetto Fourier. Si imbatte invece in una funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali; questa non ammette una scrittura sotto forma di serie di Fourier; ammette tuttavia un'espressione tramite due limiti (sarà chiamata *funzione di Dirichlet*):

Dirichlet

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} [\cos(2\pi n!x)]^m$$

- Infatti se x è razionale, a partire da un certo *n* in poi l'argomento del coseno è un multiplo intero di 2π e quindi vale 1, e tale sarà il suo limite per $m\to\infty$; se x è irrazionale l'argomento del coseno sarà sempre diverso da un multiplo intero di 2π e quindi il coseno sarà < 1, e il limite della sua potenza *n*-sima è 0.

Dirichlet

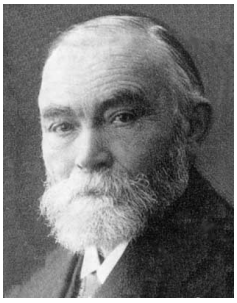
- Tale funzione non è integrabile secondo Riemann, ma lo è secondo Lebesgue (e l'integrale di Lebesgue vale 0).
- Ciò portò Dirichlet ad estendere il concetto di funzione, che viene sganciata dal qualsiasi espressione analitica e che è il concetto che si ha ancora oggi

Dirichlet

- Un altro interesse di Dirichlet fu l'equilibrio dei sistemi e la teoria del potenziale, che lo portò allo studio delle funzioni armoniche con dei dati al contorno

Frege

- **Gottlob Frege** (1848-1925), matematico e logico tedesco, professore a Jena, pose il problema del rigore della matematica.



Frege

- Diversamente da molti altri matematici, ritenne che tale problema non potesse essere risolto con gli apparati tecnici della matematica stessa, neppure con quelli dell'aritmetica. A suo avviso, la validità della conoscenza delle verità aritmetiche poteva basarsi soltanto definendo i concetti aritmetici in termini logici

Frege

- Questa posizione, che assegna alla logica il ruolo di fondamento della matematica, viene detta **logicismo**.

Hilbert

- **David Hilbert** (1862 - 1943), uno dei più eminenti matematici a cavallo tra il XIX e il XX secolo, si iscrisse all'Università di Königsberg, sua città natale.

Hilbert

Hilbert

- Ottenne il dottorato con Lindemann, nel 1885 con la tesi ***Sulle proprietà invarianti di speciali forme binarie, in particolare le funzioni circolari***.

Hilbert

- Nello stesso periodo era studente di dottorato nella stessa università anche **Hermann Minkowski**, un tedesco nato a Kaunas, a cui fu legato da profonda amicizia e un'altrettanto profonda influenza reciproca si ebbe nei loro lavori.

Minkowski

- **Hermann Minkowski** (1864-1909)
- Nato in Lituania, di origine ebrea, insegnò a Bonn, Göttingen, Königsberg e Zurigo, dove ebbe come allievo Einstein

Minkowski

- Nel 1907 intuì che la relatività ristretta poteva essere meglio raffigurata se si prendeva non già lo spazio euclideo, bensì lo spazio-tempo. Su questa intuizione poi Einstein basò la sua teoria della relatività generale

Hilbert

- Hilbert rimase all'Università di Königsberg come docente dal 1886 al 1895, quando in seguito all'interessamento di Klein ottenne la cattedra di matematica a Göttingen, dove restò fino alla fine della sua carriera.

Hilbert

- Il lavoro *Fondamenti di geometria* (1899) sostituisce agli assiomi di Euclide un insieme formale, composto di 21 assiomi, che evita le contraddizioni derivanti da quello di Euclide.

Hilbert

- Indipendentemente e contemporaneamente, uno studente statunitense di 19 anni, **Robert Moore** pubblicò un insieme di assiomi equivalenti. Alcuni assiomi sono gli stessi, qualche assioma di Moore è un teorema nel sistema di Hilbert, e viceversa.

Hilbert

- Dopo aver risolto brillantemente i problemi della geometria, Hilbert si accinse a fare lo stesso con la matematica. Riconoscendo comunque l'impresa superiore alle sue sole forze, preparò una lezione dal titolo "**I problemi della matematica**" per il *Secondo Congresso Internazionale di Matematica*.

Hilbert

- Eccone l'introduzione:

  Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro cui si nasconde il futuro; di gettare uno sguardo ai prossimi sviluppi della nostra scienza e ai segreti del suo sviluppo nei secoli a venire?

Hilbert

- Il discorso venne pronunciato a Parigi durante il Congresso, dove Hilbert introdusse i suoi famosi 23 problemi: alcuni furono risolti in breve termine, ma altri sono tuttora irrisolti e continuano ad essere una sfida per i matematici.

Hilbert

- Con questa iniziativa, Hilbert diede il via alla **scuola formalista**, una delle tre scuole della matematica del 1900 (le altre sono la *logicista* e l'*intuizionista*).
- Secondo il formalismo la matematica è un gioco privo di significato in cui si gioca con contrassegni privi di significato secondo regole formali concordate in partenza. Essa è quindi un'attività autonoma del pensiero.

Hilbert

- Ma il suo tentativo di assiomatizzazione della matematica era destinato a fallire: nel 1931 Gödel dimostrò come un sistema formale che non fosse contraddittorio non potesse dimostrare la sua completezza. Tuttavia nulla si può dire riguardo la dimostrazione da parte di un differente sistema formale sulla completezza della matematica.

Hilbert

- Hilbert istituì una buona scuola intorno a sé; tra i suoi studenti vi furono **Hermann Weyl** (1885-1955), il campione di scacchi **Emanuel Lasker** (1868-1941) e **Ernst Zermelo** (1871-1953). **John Von Neumann** (1903-1957) fu suo assistente.

Hilbert

Attorno al 1909 Hilbert si dedicò allo studio delle equazioni differenziali ed integrali: i suoi lavori portarono direttamente allo sviluppo della moderna analisi funzionale. Per questi suoi studi, Hilbert introdusse il concetto di spazio a infinite dimensioni, chiamato in seguito **spazio di Hilbert**.

Banach

- In seguito, **Stefan Banach** (1892-1945) ampliò il concetto, definendo gli spazi di Banach, fondamento dell'assiomatizzazione della teoria degli spazi vettoriali topologici.