STORIA DELLA MATEMATICA
Prof. Carlo Minnaja

Lezioni per studenti del Corso di Laurea in Matematica

1ª settimana

Costruzione con riga e compasso

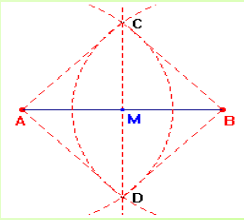
- Dato un insieme di punti **E** nel piano euclideo, consideriamo due tipi di operazioni:
- **Operazione 1** (riga) - tracciare una linea retta che colleghi due qualsiansi punti di **E**.
- **Operazione 2** (compasso) - disegnare una circonferenza il cui centro sia un punto di **E** e il cui raggio sia uguale alla distanza tra due punti di **E**.

Costruzione con riga e compasso

- I punti di intersezione di due rette, di due circonferenze, o di una retta e una circonferenza sono **costruibili** con un solo passo.
- Un **punto** si dice **costruibile** se esiste una successione finita r_1, é , r_n di punti di E tale che, per ogni i=1, é , n, il punto r_i è costruibile in un solo passo.

Costruzione con riga e compasso

- Esempio: costruzione del **punto medio** di un dato segmento



I tre problemi classici della matematica greca

- **Duplicazione del cubo**

  ovviamente il problema è dato da

  $$b^3 = 2\,a^3$$

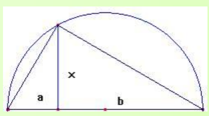
  cioè *b* è *a* per la radice cubica di 2.

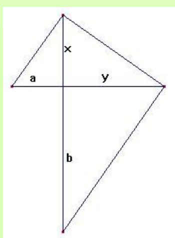
- **Ippocrate** dimostrò che la risoluzione di questo problema equivale a studiare lõintersezione tra coniche, due parabole ed una iperbole equilatera (non risolubile con riga e compasso)

Duplicazione del cubo

- Presso i Pitagorici era noto come inserire un segmento ***x*** medio proporzionale tra due segmenti dati *a* e *b*, cioè era noto come costruire segmenti che verificassero la proporzione $a : \mathbf{x} = \mathbf{x} : b$
- Non era nota, invece, l'estensione al caso dell'inserzione di due segmenti *x* e *y*, medi proporzionali tra due segmenti dati, in modo che valga la proporzione $a : \mathbf{x} = \mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{y} : b$

Duplicazione del cubo





Duplicazione del cubo

La relazione

$$\mathbf{a / x = x/y = y/b}$$

si trasforma nel sistema

$$\boxed{\begin{cases} x = ab / y \\ x^2 = ay \end{cases}}$$

Duplicazione del cubo

da cui:

$$x^3 = a^2b$$

il segmento x è uguale allo spigolo di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo a base quadrata di lato a e avente altezza b.

Per $b = ma$ si ottiene:

$$x^3 = ma^3$$

da cui, per $m = 2$, si ottiene $x^3 = 2a^3$

Duplicazione del cubo

Il problema è quindi ridotto ad un problema di geometria piana.

La risoluzione del problema può quindi ridursi allo studio dell'intersezione tra due parabole oppure dell'intersezione di una di queste con un'iperbole equilatera: infatti ponendo $b = x$, $b^2/a = y$ si ha

$$x^2 = ay \quad y^2 = 2ax \quad xy = 2a^2$$

Euclide - Elementi

- I **numeri primi** sono infiniti
- Se fossero finiti, e il più grande si chiamasse p_k, allora consideriamo il numero

$$N = p_1p_2p_3\ldots\ldots p_k + 1$$

Questo non sarebbe divisibile per nessun p_i (la divisione avrebbe resto 1), e quindi sarebbe primo a sua volta e maggiore di p_k

(dim. adattata modernamente da quella di Euclide, *Elementi*, libro IX; ne esistono altre)

Numeri primi

- ci sono molti studi sulla distribuzione dei numeri primi:
- ad es. Gauss dimostrò che il numero di primi minori o uguali di un dato numero x (indicato con $\pi(x)$) è approssimativamente

x/ln x

Esistono anche approssimazioni migliori

Numeri primi

- Il *postulato di Bertrand* (che fu poi dimostrato da Chebyshev) dice che tra un numero naturale n e $2n$ esiste sempre almeno un numero primo

Trigonometria

Trigonometria

- La trigonometria ha lo scopo di determinare i valori di alcuni elementi dei triangoli essendo noti altri elementi; quella piana tratta dei triangoli piani, quella sferica tratta dei triangoli sferici.
- La *trigonometria* è nata per risolvere problemi di astronomia e di agrimensura.

Trigonometria

- La parola ***trigonometria*** compare per la prima volta nel libro *Sphaericorum libri tres* (Heidelberg 1595) di Bartholomeus Pitiscus

Trigonometria

Å **Aristarco di Samo** (III sec. a. C.) aveva notato che il rapporto tra lôarco e la corda decresce al decrescere dellôangolo da retto a nullo

Trigonometria

Å **Aristarco** era un grande astronomo:

Å scoprì la precessione degli equinozi

Å determinò lôangolo dellôeclittica

Å misurò le irregolarità del moto della Luna

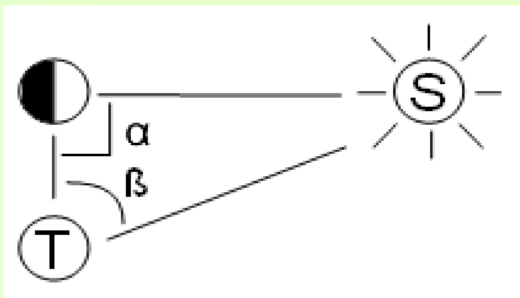
Å elaborò un catalogo di oltre 1000 stelle

Trigonometria

ÅAristarco da Samo fu il primo a proporre una teoria eliocentrica

Åcalcolò il rapporto tra le distanze dalla Terra del Sole e della Luna con un ragionamento geometrico

Trigonometria



La luna è in quadratura

Trigonometria

Å Quando la Luna è in quadratura osservando ß si può calcolarne la tangente, che appunto è il rapporto tra le due distanze

Å In realtà Aristarco trovò questo rapporto stimandolo tra 18 e 20, mentre è 400

Trigonometria

Å Ma la precisione con cui Aristarco poteva calcolare lôangolo era scarsa e ciò ha portato ad una valutazione estremamente imprecisa

Å del pari era scarsa la precisione temporale con cui poteva determinare lôora esatta della quadratura

Trigonometria

Å La trigonometria compare con una **tabella di valori dellôarco e della corda** per una serie di angoli al centro di una circonferenza

Trigonometria

Å **Ipparco di Nicea** (190-120 a. C) è forse il primo che divide la circonferenza in 360°

Trigonometria

- Ipparco visse a lungo a Rodi (dove probabilmente morì), fece un catalogo di 1080 stelle, con latitudine e longitudine sulla sfera celeste, e suddivise gli astri in classi di luminosità, classificazione che è usata ancora oggi, dopo una leggera modifica nell'Ottocento
- Fu probabilmente il primo che calcolò le eclissi solari dei successivi 600 anni

Trigonometria

- Confermò la precessione degli equinozi scoperta da Aristarco
- Calcolò la lunghezza dell'anno in 365 gg., 6 h., 55', 12"

Trigonometria

- Ipparco scrisse probabilmente 14 libri, dei quali quasi nulla è giunto fino a noi
- Parlano di lui l'Almagesto di Tolomeo, Teone nei commenti dell'Almagesto
- Una pagina intera gli è dedicata da Leopardi nella sua *Storia dell'astronomia*

Trigonometria

- **Menelao di Alessandria** (I sec. d. C.) ci fornisce i primi sviluppi della trigonometria sferica.
- Le sue opere sono perdute, ma è rimasta una traduzione araba di *Sphaerica*, in tre libri.
- Per la prima volta compare il concetto di triangolo sferico come zona limitata da tre archi di cerchio massimo

Trigonometria

- **Tolomeo d'Alessandria** (m. 168 d. C.)
- *Sintassi matematica* (in arabo: *Almagesto*):
- 13 libri che mescolano trigonometria e astronomia
- Tolomeo divide la circonferenza in 360°
- Tolomeo calcola quindi per ogni arco di un certo numero di parti la corrispondente *corda* (inizia con gli archi di 36° e 72°)

Trigonometria

- Tolomeo non usava tuttavia le funzioni *seno*, *coseno*, ma faceva ricorso alle **corde** degli archi (e quindi dell'arco doppio)
- Tuttavia basta sostituire nell'Almagesto al posto della corda dell'arco *x* la quantità

  2 *sen* (*x*/2)

Trigonometria

- Nell'Almagesto si trovano varie formule in uso ancora adesso
- $sin^2x + cos^2x = 1$
- $sen\,(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\beta\,cos\,\alpha$
- $cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta$

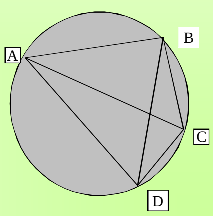
- Tali formule sono un caso particolare del teorema seguente:

Trigonometria

- Sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio; allora

  AB × CD + BC × DA =

  = AC × BD



Trigonometria

Å cioè la somma dei prodotti di lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali

Å Se AC fosse un diametro si otterrebbero le formule che compaiono nellôAlmagesto