Storia della Matematica

13a settimana

La perdita della certezza: il problema dei fondamenti e delle congetture in matematica

La perdita della certezza

- Nell'antichità non si parlava di congetture: il grande libro della matematica greca, gli Στοιχεια di Euclide, propone concetti primitivi, assiomi e teoremi.
- Tra gli assiomi troviamo verità non dimostrate e prese per evidenti di per sé, senza con questo prospettare l'ipotesi che potessero non essere verificate.

La perdita della certezza

- Gli assiomi erano come regole del gioco, che definiscono il gioco a cui si sta giocando, senza supporre che ne esistano altre: Euclide non supponeva che esistessero altre geometrie ed era invece piuttosto perplesso sulla necessità del postulato delle parallele: infatti non lo usa che in un punto piuttosto avanzato dell'intera opera.

La perdita della certezza

- La geometria greca si riteneva una astrazione della natura percepita dai sensi. Se certezza mancava, si trattava di una eventuale non perfetta adeguatezza a qualcosa che esisteva di per sé, al di fuori del pensiero che la scopriva. La matematica descriveva la natura, era un suo *modello*.

Scientificità delle congetture

Legge dei grandi numeri

- Data una successione di variabili casuali X_1, X_2,..., X_n,... indipendenti e identicamente distribuite con media μ, si consideri la media calcolata; la legge (forte) dei grandi numeri **afferma** che:
- la media campionaria (quella misurata) converge *quasi certamente* alla media calcolata delle X_i.

Scientificità delle congetture

- Legge dei grandi numeri: diventa piccola la probabilità che si verifichi il contrario
- La legge dei grandi numeri assume a principio certo una incertezza dichiarata
- Definizione empirica di **indipendenza statistica**: problema che si morde la coda.

Strategie

- Strategia nel dimostrare una congettura: proporne una più generale, dimostrare quest'ultima, e da questo concludere che anche la congettura particolare è dimostrata.
- Potrebbe succedere che il caso generale sia dimostrabile più facilmente.
- Si è tentato di dimostrare l'ipotesi del continuo dimostrando l'ipotesi generalizzata del continuo (senza riuscirvi)

I dubbi e il vero

Il "vero" all'università di Padova

- DISCORSO INAUGURALE

dell'anno accademico 1905-906

- LETTO NELL'AULA MAGNA DELL'UNIVERSITÀ

il 6 novembre 1905

- *dal Professore ordinario di Geometria analitica*

SENATORE GIUSEPPE VERONESE

Galileo disse che la Natura è un libro scritto in lingua matematica. Dove è ordine e misura la matematica può infatti entrare da matrona, e anche quando non è tale, dirige la costruzione degli istrumenti di precisione, che servono sempre alle scienze sperimentali, o delle macchine che servono all'industria; così che Napoleone I affermava, che dal progresso delle matematiche dipende la prosperità della nazione.

…………

Ed è pur noto che la matematica si presta volentieri a spiegare certi giuochi ricreativi, ed è una buona medicina contro la passione del giuoco del lotto.

Il “vero”

- Per Veronese la matematica dà delle conclusioni vere, date le premesse.
- La fiducia nella certezza è assoluta.

Il secolo dei dubbi

- I **dubbi** sugli insiemi:
  - si possono fare calcoli e considerazioni su enti di cui non si sa se esistono e di cui non si conoscono le proprietà?
  - quali conclusioni si possono considerare vere?

Hilbert e i problemi del secolo

Hilbert e i problemi del secolo

- Per il *Secondo Congresso Internazionale di Matematica* Hilbert presentò una lezione dal titolo "**I problemi della matematica**“.

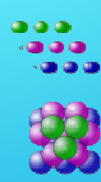
Hilbert e i problemi del secolo

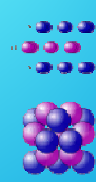
- Egli introdusse 23 problemi da risolversi nel secolo che si apriva: di questi (solo 10 presentati effettivamente, gli altri vennero aggiunti in seguito), 9 sono stati risolti, con soluzione accettata da tutti; 8 sono stati risolti (parzialmente), ma la soluzione non è accettata da tutti; 4 dichiarati troppo vaghi; 2 sono rimasti aperti

Il miglior impacchettamento

- Uno di questi problemi (il 18°) si scarica sulla dimostrazione di una congettura: quale è la migliore disposizione di sfere di un certo diametro fissato che riempie maggiormente lo spazio di una piramide?
- Lasciandole cadere dal vertice della piramide, sperimentalmente non si è riusciti a superare il 65%.

Il miglior impacchettamento





Il miglior impacchettamento

- Keplero dimostra (1611) che una disposizione a strati secondo una regolarità esagonale o cubica riempie al 74% ($\pi/\sqrt{18}$).
- Keplero congettura che nessun'altra disposizione sia più densa.

Il miglior impacchettamento

- La congettura è stata dimostrata da Gauss (1831) per qualsiasi distribuzione regolare, ma non per una distribuzione qualsiasi.
- Il passo successivo sarebbe stato il ridurre tutte le distribuzioni irregolari ad un numero finito, e calcolare singolarmente quelle.

Il miglior impacchettamento

- Il problema è rimasto stagnante per oltre un secolo e mezzo.
- Nel 1998 Thomas Hales ha annunciato di possedere una dimostrazione della congettura di Keplero. La sua dimostrazione è fatta per esaustione e prevede di controllare molti casi singoli mediante calcoli al computer.

Il miglior impacchettamento

- Hales pubblica sugli *Annals of Mathematics* una serie di articoli (per complessive 282 pagine e 3 giga di programmi)
- I revisori, dopo aver studiato l'articolo nell'arco di quattro anni, hanno dichiarato di essere certi "al 99%" della correttezza della dimostrazione di Hales. Dunque la congettura di Keplero è molto vicina ad essere considerata un teorema.

Il miglior impacchettamento

- Nel gennaio del 2003 Hales ha annunciato l'inizio di un progetto di collaborazione avente lo scopo di produrre una dimostrazione formale completa della congettura di Keplero. Lo scopo è quello di rimuovere qualsiasi incertezza residua sulla validità della dimostrazione creando una dimostrazione formale che possa essere verificata da programmi di controllo automatico di dimostrazioni come il “HOL theorem prover”.

HOL theorem prover

- HOL (Higher Order Logic) **theorem prover** è una famiglia di sistemi di dimostrazione interattiva di teoremi elaborata da varie università.
- Nata a Cambridge nel 1988 è giunta nel 2008 alla quarta versione (HOL 4), elaborata principalmente dalle università di Cambridge e dello Utah

Il miglior impacchettamento

- L'utilizzo di HOL sarebbe un "dimostrare la validità della dimostrazione".
- Il progetto lanciato da Hales è chiamato *Project FlysPecK*, dove le lettere F, P e K sono le iniziali delle parole che compongono la frase *Formal Proof of Kepler* (dimostrazione formale di Keplero).
- (*Flyspeck*: macchiolina di mosca, esplorazione minutissima)

Il miglior impacchettamento

- Hales ha stimato che serviranno circa venti anni di lavoro per produrre una dimostrazione formale completa.

L'ultimo teorema di Fermat

L'ultimo teorema di Fermat

- Fermat (1601-1665) aveva scritto (1637) di aver concepito una dimostrazione del seguente teorema:
- non esistono numeri interi *a, b, c* tali che
  - $a^n + b^n = c^n$

  per nessun $n > 2$.

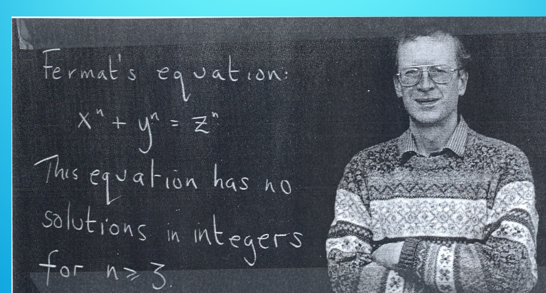
L'ultimo teorema di Fermat

- *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratorum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos euisdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet*

L'ultimo teorema di Fermat

- Il teorema si riduce a dover essere dimostrato nei casi in cui sia $n = 4$ e n sia uguale a un numero primo.
- Per $n = 4$ fu dimostrato da Fermat stesso
- Per $n = 3$ fu dimostrato da Eulero (1707-83)
- Per $n = 5$ fu dimostrato da Legendre (1752-1833)
- Per n qualunque è stato dimostrato da Andrew Wiles (1995), premio Wolf

L'ultimo teorema di Fermat



L'ultimo teorema di Fermat

L'ultimo teorema di Fermat

L'ultimo teorema di Fermat

- Fu dapprima dimostrata una congettura secondo la quale ogni contro-esempio alla validità dell'ultimo teorema di Fermat avrebbe prodotto una curva ellittica del tipo

$$y^2 = x(x-a^n)(x+b^n)$$

- che sarebbe stata un contro-esempio alla congettura di Taniyama-Shimura.

L'ultimo teorema di Fermat

- Quest'ultima congettura propone un collegamento fra le curve ellittiche e certe forme particolari (forme modulari)
- Wiles (con il suo collaboratore Taylor) dimostrò che un caso speciale della congettura di Taniyama-Shimura era sufficiente per escludere tali contro-esempi

L’ultimo teorema di Fermat

- Taniyama e Shimura si conobbero per caso richiedendo lo stesso libro in una biblioteca; isolati scientificamente nel caos del dopo-guerra in Giappone, proposero ardite con-getture e problemi banali, risolvendone alcuni. Taniyama si suicidò a 31 anni, non si sono ricostruite le cause. La congettura fu poi dimostrata da André Weil.

I problemi del terzo millennio

I problemi del terzo millennio

- Ne sono stati formulati sette, il Clay Mathematics Institute offre un milione di dollari per la soluzione di ciascuno di questi (Clay è un imprenditore americano che finanzia l’istituto).

I problemi del terzo millennio

- Uno avanza dai problemi di Hilbert: *la congettura di Riemann*: parte reale co-stantemente uguale a 1/2 delle soluzioni generiche dell’equazione
- $0 = \zeta(s) =$
- $1/(s-1) + \gamma_0 + \gamma_1 (s-1) + \gamma_2 (s-1)^2 + \dots$
- dove i coefficienti sono delle particolari costanti ($\zeta(s)$ si dice *funzione di Riemann*)

La congettura di Goldbach

- Un altro ha una provenienza antica (1742), ma è stato posto successivamente come problema del millennio (nella sua riformulazione di Eulero): *la congettura di Goldbach*
- Ogni numero pari >2 può essere scritto come somma di due primi (1 non viene considerato primo)

La congettura di Goldbach

- Attualmente la congettura è stata verificata fino a 16 x 10^{17} (fino a dicembre scorso); il programma di calcolo non è dei più sempli-ci

I problemi del terzo millennio

- Un altro dei problemi era la congettura di Poincaré: ogni varietà tridimensionale semplicemente connessa (compatta e senza bordi) è omeomorfa ad una sfera tri-dimensionale (ha applicazioni pratiche, ad es. in fisica quantistica)
- Risolto dal russo Grigorij Perel'man (2003) che rifiuta il premio e la medaglia Fields

Il XX secolo

- **Tre certezze perdute**:
- La **relatività** elimina lo spazio e tempo assoluti della fisica newtoniana e kantiana
- La **teoria quantistica** elimina il sogno newtoniano di un processo di misurazione controllabile
- Il **caos** elimina la fantasia laplaciana della prevedibilità deterministica

Il XX secolo

- Il **principio di indeterminazione di Heisenberg** (1927) stabilisce che:
- «non è possibile conoscere simultaneamente con certezza due grandezze collegate» (ad esempio la quantità di moto e la posizione di una particella)

Il XX secolo

- In realtà avendo le particelle anche proprietà ondulatorie, non è definibile una coppia posizione/momento in un determinato istante:

$$\Delta x \Delta p > \hbar/2$$

L'effetto farfalla

- Edward Lorenz (29.12.1979) alla Conferenza della *American Association for the Advancement of Science* ipotizza che il battito delle ali di una farfalla in Brasile possa provocare una tromba d'aria nel Texas.

L'effetto farfalla

- La considerazione di Lorenz proveniva dal fatto che un programma di simulazione del clima portava conseguenze fortemente diverse pur con una variazione piccola delle condizioni iniziali.

Il modello matematico

- Il modello è una rappresentazione approssimata della realtà, che considera un numero minore di parametri.
- Per rappresentare l'atmosfera sono necessari circa 6 milioni di parametri, non misurabili con precisione
- Le previsioni economiche, demografiche, di crescita si basano su modelli matematici

Il caos

- La teoria del caos è nata quando la scienza classica non aveva più mezzi per spiegare gli aspetti irregolari e incostanti della natura; è una teoria scientifica, nata su sperimentazioni fisiche, meteorologiche, biologiche, matematiche, socio-economiche.
- E' una teoria che cerca un ordine macroscopico nel disordine microscopico, è il tentativo di recupero della certezza nella sicurezza dell'incertezza

Il caos

- La funzione ricorsiva (lineare):

  $$x_{n+1} = 2x_n$$

  è sensibile alle condizioni iniziali (due valori di x leggermente diversi si evolvono divergendo e aumentando la loro distanza), ma il suo andamento è prevedibile e le variabili evolvono verso l'infinito, cioè dopo un numero sufficientemente alto di passaggi x_n diviene grande quanto vogliamo. Quindi non ha un comportamento caotico.

Il caos

- La funzione ricorsiva non lineare:

  $$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$$

  è sensibile alle condizioni iniziali, non ha andamento prevedibile e, per valori di x iniziali tra 0 e 1, rimane confinata in uno spazio finito (tra 0 e 1), e per certi valori iniziali di x esibisce un comportamento caotico.

Il caos

- Se si prende $x_1 = 0{,}1$ risulta
- $x_2 = 0{,}36$
- $x_3 = 0{,}92$
- $x_4 = 0{,}29$
- $x_5 = 0{,}8236$

Il caos

De Giorgi

- **Ennio De Giorgi** (1928-1996) premio Wolf (unico italiano, 1990), premio presidente della Repubblica, socio di numerose accademie.
- Studente di ingegneria a Roma, passato a matematica

De Giorgi

- Ha lasciato la sua impronta in numerosi campi, principalmente nella teoria della misura, nelle equazioni differenziali alle derivate parziali, ma soprattutto nel calcolo delle variazioni; ha creato un concetto nuovo di convergenza in energia per operatori ellittici.

De Giorgi

- Ha fortemente contribuito alla soluzione del problema di Plateau in casi molto generali (le superficie minime *sono* regolari)
- Ha risolto il 19° problema di Hilbert: le lagrangiane sono analitiche
- (lagrangiane: funzionali che descrivono il moto di un sistema)

De Giorgi

- Docente della Scuola Normale Superiore di Pisa vi ha fondato una scuola di analisti di grande valore.
- Profondamente credente, riteneva che la religione desse un senso alla vita anche nel lavoro e nell'attività quotidiana.
- Fortemente attivo in Amnesty International si adoperò per la liberazione di matematici vittime di regimi politici

De Giorgi

- La sua scuola fu soprattutto pisana, ma i suoi numerosi allievi si distribuirono in varie università e in vari campi diversi; negli ultimi anni si occupò di matematica applicata all'industria
- Miranda (TN), Giusti (FI), Bombieri (ora a Princeton, n. 1940, medaglia Fields nel 1974, unico italiano)
- A Padova: Chiffi

Barsotti

- **Iacopo Barsotti** (1921-1987)
- Cultore di algebra, membro dell'Accademia dei Quaranta, tra i più grandi docenti che abbiano insegnato a Padova nell'ultimo cinquantennio

Barsotti

- Fondatore di una scuola di geometria algebrica a Padova (Cristante, Gerotto, Baldassarri, Candilera, Sullivan, Bertapelle)
- L'algebra entrò in Italia probabilmente nell'a.a. 1960-61, e i corsi di algebra erano tenuti da professori di geometria. Testi di algebra non esistevano quasi, l'esile testo di Barsotti "Appunti di algebra" esce nel 1968.

Matematica nell'Ingegneria di Padova

- 1806: Studio Matematico: produce ingegneri, architetti, agrimensori. Siamo durante il Regno d'Italia (Napoleone)
- 1815: congresso di Vienna: ritorno del Veneto all'Austria sotto la forma di Regno Lombardo-Veneto, dipendente dall'Austria e governato formalmente da un Viceré

Matematica nell'Ingegneria di Padova

- 1859: amputazione della Lombardia a seguito della II guerra d'Indipendenza (gen. Bourbaki)
- 1866: annessione del Veneto al Regno d'Italia (Giusto Bellavitis: "ho vissuto abbastanza")

Matematica nell'Ingegneria di Padova

- 1876: Regio Decreto 8 ottobre: nasce la Scuola d'Applicazione degli Ingegneri: un corso di laurea, 29 insegnamenti, 14 professori
- Primi anni '60: specializzazione delle materie, liberalizzazione degli accessi, proliferazione dei corsi affidati a professori incaricati

Matematica nell’Ingegneria di Padova

- 1960: muove i primi passi la Ricerca Operativa e l’Associazione Italiana per il Calcolo Automatico
- 1964: nascita del Centro di Matematica Applicata, rivolto all’industria, e poi specificamente all’economia, fondato da Mario Baldassarri (targa al piano terra della Torre Archimede, settore C)

Matematica nell’Ingegneria di Padova

- **Mario Baldassarri** (1920-1964)
- Brillante laureato nel 1941, fu ufficiale di artiglieria in Africa, catturato nel 1943 e avviato in un campo di prigionia in Texas, dove in condizioni difficilissime continuò a pensare alla matematica e prese confidenza con metodi non usuali in geometria algebrica. Poté tornare in Italia solo nel 1946.

Matematica nell’Ingegneria di Padova

- Si dedicò principalmente alla geometria algebrica scrivendo una notevole monografia, *Algebraic varieties*, e portando in Italia metodi allora sconosciuti.
- Nei primi anni ‘60 fu un fautore delle applicazioni della matematica; scrisse dei testi di analisi e geometria molto originali, dedicati agli ingegneri.

Matematica nell’Ingegneria di Padova

- Le distribuzioni entrarono come corso ufficiale in Italia probabilmente con il corso di analisi superiore a Pisa (Stampacchia, 1960-61); erano impiantate sulla formulazione russa delle funzioni generalizzate (spazi di Sobolev)

Matematica nell'Ingegneria di Padova

- Le distribuzioni entrarono all'università di Padova probabilmente nel 1960, con una tesi di laurea che Mario Baldassarri assegnò ad una allora brillante studentessa, oggi prof. Bresquar; le distribuzioni erano viste in quell'approccio secondo la scuola francese (Martineau e Treves; seguirà poi un testo di Schwartz, che ebbe numerosissime edizioni)

Richard

- **Ubaldo Richard** (1915-2004)
- Laureatosi a Torino e assistente in quel politecnico, fu poi alla Scuola di Ingegneria di San Paolo in Brasile; tornò in Italia nel 1961, fu a Padova dal 1964 al 1980.
- Primo direttore, dal 1965 al 1977, dell'Istituto di Matematica Applicata, poi nel 1989 evolutosi nel Dipartimento di Metodi e Modelli per le Scienze Applicate

Richard

- Cultore di matematica applicata, specialmente di applicazioni numeriche, va ricordato anche per la sua cultura umanistica (il problema delle due culture) che pose sempre a complemento della cultura matematica. Ha pubblicato un acuto lavoro su un passo di matematica neotestamentaria.
- A lui è dedicata l'Aula del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate.

Richard

- Sui suoi testi di analisi per il I e per il III anno si sono formate generazioni di studenti; ha lasciato il suo ricchissimo patrimonio librario alla Biblioteca del Seminario Matematico.
- La sua allieva Anna Maria Bresquar ha pubblicato negli anni '70 lavori su disuguaglianze tra integrali di funzioni aventi la derivata seconda

Chiffi

- **Antonio Chiffi** (1932) Allievo della Scuola Normale di Pisa, in parte allievo di De Giorgi (studi sulle correnti).
- Ha insegnato a Ingegneria a Padova dal 1965 al 1998; sul suo testo di Analisi si sono formate generazioni di studenti.
- Si sono laureati con lui, tra gli altri, i proff. De Marco, Stefani, Pini. E' stato suo assistente Antonio Ambrosetti, vincitore tre settimane fa del premio Galileo

Rosati

- **Mario Rosati** Professore di geometria, direttore sia dell'Istituto di Matematica Applicata che del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata), autore di vari articoli di storia delle istituzioni matematiche padovane.

Ingegneria in carcere

- Coetaneo di Bepi Colombo e Mario Baldassarri fu Lorenzo Contri (n.1922), che si adoperò nei primi anni Settanta ad introdurre la possibilità della laurea in ingegneria in carcere. Il biennio fu relativamente facile, ma solo tre riuscirono a terminare gli studi con la laurea.
- http://www.leduecitta.com/articolo.asp?idart=847
- Ancora oggi la nostra Facoltà offre corsi a carcerati

La matematica padovana nell'economia

- 1975: Inizia ad operare CERVED S.p.A., prima società di informatica delle Camere di Commercio voluta da Mario Volpato (1915-2000).

Matematica nell'Ingegneria di Padova

- 1976: a cento anni dalla nascita, l'ingegneria è strutturata in 5 corsi di laurea (oggi una quindicina), 207 insegnamenti (senza le multiplazioni), 273 docenti. Già parecchi matematici sono incardinati nella facoltà di Ingegneria. Il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria è stato per alcuni anni equiparato al corso di Analisi Superiore e frequentato da studenti di matematica

Matematica nell'Ingegneria di Padova

- 1980: legge istitutiva dei Dipartimenti, uno di questi è costituito di soli docenti incardinati nella Facoltà di Ingegneria, e ne comprende soltanto la metà.

La linguistica computazionale

- 1967, anno in cui fu formata una Divisione di Linguistica Computazionale presso il Centro Nazionale Universitario di Calcolo Elettronico (CNUCE), poi diventata un istituto indipendente del CNR nel 1978. Io ne sono stato dalla fondazione per 16 anni fino al 1994 membro del consiglio scientifico come rappresentante del Comitato CNR per la matematica fin quando tale rappresentante non comparve più nel nuovo statuto.

La linguistica computazionale

- Elaborazione di *corpora*:
- Word, TeX, riassunti automatici, completamento delle parole, correzione ortografica
- interrogazione di banche dati, dal Bancomat a qualsiasi catalogo
- Traduzione automatica (manuali per elettrodomestici, documenti europei)

La linguistica computazionale

- *Association for Computational Linguistics*, presidente della sezione europea è Giorgio Satta.
- Un altro centro che ha una sezione di linguistica computazionale è l'Istituto Trentino di Cultura, vi lavorano 220 ricercatori
- http://www.itc.it/irst/Renderer.aspx?targetID=111

La linguistica computazionale

- Istituto di Scienze e Tecnologie della Cognizione del CNR, fondato nel 2002, che ha inglobato il Centro di studi per le ricerche di fonetica. Nel complesso sono 105 ricercatori a tempo pieno. La sede centrale è a Roma, esiste una sezione a Padova
- http://www.cnr.it/istituti/sezione.html?id=289&cds=078

Altri campi

- Algoritmi matematici che sono alla base di applicazioni di informatica:
- il page-ranking di Google utilizza l'algoritmo Hyper Search del padovano Massimo Marchiori

Altri campi

- Una via di mezzo tra la linguistica computazionale e l'informatica è il Web semantico, ambiente in cui i documenti sono associati a informazioni che ne identifichino il contesto semantico

Altri campi

- Calcolo di distanze sulla terra: Google Earth usa le formule di Vincenty
- http://en.wikipedia.org/wiki/Vincenty%27s_formulae
- Active touch: software per ingrandire, impiccolire, ruotare immagini con il movimento della mano, usa semplicemente il teor. di Pitagora