IL PROBLEMA DELLE DUE CULTURE NEGLI INEDITI DI UBALDO RICHARD
di A. M. Bresquar e C. Minnaja
(nota presentata da C. G. Someda, s. e., nella seduta del 23 ottobre 2005)

Il prof. Ubaldo Richard, membro di questa Accademia dal 1971, è mancato il 3 luglio 2004[1]. Alla vita dell'Accademia egli aveva partecipato con frequenti presenze alle sedute e anche con una ricerca sulla matematica neotestamentaria, che lo aveva portato ad interessanti ipotesi sulle conoscenze matematiche di altri popoli.

Il 28 maggio 1986 egli aveva tenuto una conferenza presso l'Accademia delle Scienze di Torino su invito del presidente Silvio Romano con il titolo "L'insegnamento della matematica e il problema della due culture"; un testo definitivo di tale esposizione non fu mai redatto, e quindi mai pubblicato. Successivamente l'Accademia Patavina, tramite il suo Presidente Lazzarini, gli aveva richiesto un'esposizione su un tema simile, se non proprio uguale. Egli aveva accettato con piacere l'invito in quanto era particolarmente sensibile alla questione: cultore sia di matematica che di materie umanistiche, vedeva con particolare dispiacere la cesura tra le due culture quale gli appariva nell'insegnamento della scuola media italiana, inferiore e superiore.

La raccolta di dati e documentazione varia per una esposizione ampia e coerente lo impegnò a più riprese e a questa raccolta egli si dedicò con grande passione, fin quando tuttavia non fu più in grado di riordinare gli appunti, rimasti in parte in uno stato estremamente provvisorio.

Gli autori di questa nota hanno cercato di ricostruire, sulla base di carte rimaste, quello che il Richard avrebbe presumibilmente detto se avesse avuto la possibilità di curare la stesura, in modo tale da poter soddisfare a posteriori l'impegno che egli si era preso. Quanto segue è quindi il risultato di un'indagine intesa a presentare un testo che in certe parti risulta fortemente attendibile, in quanto si basa su una redazione provvisoria, ma effettiva; riguardo a certe altre invece le note trovate erano estremamente succinte e più difficilmente si vedeva un coordinamento tra citazioni. È stata tentata quindi una ricostruzione che tenesse conto anche di quanto non si è trovato scritto sui suoi appunti, ma che probabilmente sarebbe stato aggiunto a voce in fase di presentazione. Ubaldo Richard usava documentarsi scrupolosamente, e le sue citazioni di testi riguardano quelli disponibili all'epoca della intesa stesura, più frequentemente nella lingua originale. Gli autori hanno cercato di riportare le citazioni bibliografiche alla situazione e alla disponibilità attuale, in particolare evidenziando versioni in italiano, come pure hanno provvisto il testo di note.

Come inizio della conferenza viene qui presentata la ricostruzione di quello che egli realmente espose a Torino: i riferimenti sono alla sua città natale e a ricordi torinesi. Gli autori di questa nota hanno ritenuto opportuno non espungerli, pur essendo coscienti che, in un'esposizione fatta a Padova, tali riferimenti avrebbero avuto uno spessore emotivo minore. Tuttavia essi sono intrinsecamente legati alla cultura del Richard e quindi sono pertinenti ad una sua esposizione, in qualsiasi sede.

****

Al Presidente ed ai Soci dell'Accademia esprimo la mia profonda gratitudine per l'invito a tenere questa conferenza su "L'insegnamento della matematica e il problema delle due culture". Nato e cresciuto a Torino, dove fui aiuto al Politecnico e libero docente all'Università, sento in questo invito un grande valore sentimentale. Qualche anno fa, celebrando l'Accademia di Torino il centenario della nascita del mio Maestro Guido Fubini[2] con un Convegno, fui invitato a presentare una comunicazione. Dissi allora, citando l'invito rivolto ad Ulisse dai suoi compagni durante il soggiorno presso Circe, che tornavo

οἶκον ἐς ‘υψόροφον καὶ σήν ἐς πατρίδα γαῖαν
(Odissea, X, 474)

alla casa dall'alto tetto e alla tua terra dei padri

Lo dirò anche ora.

---

[1] Di U. Richard è stata tenuta una breve commemorazione in Accademia da parte del s.e. A. Lepschy.
[2] Guido Fubini (Venezia 1879 - New York 1943) fu professore di materie matematiche a Catania, Genova e Torino; nel 1938 emigrò negli Stati Uniti a seguito delle leggi razziali, fu all'Institute for Advanced Study di Princeton e quindi professore all'Università di New York. I suoi studi riguardano principalmente l'analisi matematica, in particolare gli integrali doppi, le funzioni analitiche di variabile complessa, il calcolo delle variazioni, ma anche la teoria dei gruppi, la geometria differenziale e la geometria non euclidea. Si dedicò anche alla matematica applicata, studiando la correzione dei tiri delle artiglierie, le equazioni delle membrane e delle piastre e alcuni problemi di ottica e di acustica.

L'interesse all'oggetto di questa conferenza ha origine nella mia giovinezza fin dal tempo del ginnasio e del liceo: frequentai una scuola di qualità superiore[3], e la mia cultura umanistica e matematica nasce in quel periodo. Quando mi iscrissi al corso di laurea in Matematica approdai all'università con la convinzione che Dante e Leopardi, Omero e Orazio, Aristotele e Kant erano "cose" oramai completamente mie: non potevo più farne a meno per tutta la vita

dum res et œtas et sororum
fila trium patiuntur atra
(Orazio, *Odi*, II, III, vv. 15-16)

finché le cose e il tempo e i fili scuri delle tre sorelle [le Parche] lo consentono.

Affrontando gli esami di maturità (giugno 1933) mi cimentai anch'io nella creazione di un distico elegiaco:

Tristia dum scholae cedunt atque horrida fata
Tristius examen horridiusque venit

mentre i fati tristi e orribili della scuola svaniscono arriva l'esame più triste e più orribile.

Per un caso fortunato partivo dunque bilanciato sulle famose "due culture". Le due culture sono quelle del celebre libro di Charles Percy Snow: *The two cultures*, Cambridge University Press, 1959[4], libro di cui esiste la traduzione italiana, con prefazione di Ludovico Geymonat[5], uno dei più grandi maestri che ho avuto la fortuna di avere[6], colui che ha fondato in Italia la filosofia della scienza. Leggo alcuni passi di questa prefazione:

> *Nessuno può essere, oggi, così cieco da non rendersi conto che l'esistenza di due culture, tanto diverse e lontane l'una dall'altra quanto la cultura letterario-umanistica e quella scientifico-tecnica, costituisce un grave motivo di crisi della nostra civiltà; essa vi segna una frattura che si inasprisce di giorno in giorno, e minaccia di trasformarsi in un vero muro di incomprensione, più profondo e nefasto di ogni altra suddivisione.*
> ……
> *Le nostre istituzioni scolastiche si reggono su una tradizione filosofica che da secoli afferma (sia pure con notevoli varianti) l'assoluta separazione del "vero" sapere dal sapere tecnico-scientifico, ed è anzi giunta a sostenere (con l'idealismo crociano) che l'attività scientifica non fa parte in alcun modo dell'attività conoscitiva. Stando così le cose, non è possibile, in Italia, illudersi di poter rinnovare le istituzioni scolastiche senza affrontare una previa, approfondita, discussione del rapporto scienza-cultura su un piano largamente filosofico.*
> ……
> *Se l'uomo potesse venir compreso in se stesso, prescindendo dai suoi rapporti col mondo, allora l'umanesimo tradizionale avrebbe perfettamente ragione di sostenere che la vera cultura nulla ha a che fare con la ricerca scientifica. Se invece l'uomo non può venire studiato al di fuori del mondo in cui vive ed opera, allora la ricerca scientifica - anche la più specialistica - che arricchisce giorno per giorno la nostra conoscenza dei processi naturali e ci rende vieppiù padroni di essi, assume un vero significato culturale in quanto ci porta ad una più profonda comprensione dell'uomo. In questa seconda ipotesi, sarà la stessa ricerca umanistica a richiedere di venire integrata con la ricerca scientifica. L'esigenza di*

[3] Il Richard fu allievo del liceo classico "Massimo d'Azeglio" di Torino dal 1929 al 1933, saltando l'ultimo anno e presentandosi direttamente alla maturità.
[4] Si tratta della redazione di una conferenza tenuta a Cambridge intitolata al nome di Rede e nota quindi sotto il nome di "Rede Lecture", ampia una cinquantina di pagine. Il problema delle due culture era già stato trattato dallo Snow in un articolo di tre anni prima, apparso, con il titolo *The two cultures*, sul *New Statesman* il 6 ottobre 1956. In tale articolo lo Snow lamentava la separazione intellettuale, sia in Inghilterra che ancor più negli Stati Unititi, tra cultori di materie umanistiche e cultori di materie scientifiche, che pure si incontravano ogni giorno; tale separazione era solitamente operata con una certa sufficienza da parte dei primi nei confronti dei secondi, quasi che solo le materie umanistiche fossero la base di una vera cultura.
[5] *Le due culture*, Feltrinelli, 1964. Va segnalato che l'opera originale del 1959 ha avuto una seconda edizione nel 1963, nella quale lo Snow ha aggiunto una seconda parte anch'essa di una cinquantina di pagine, intitolata *The two cultures: a second look*; in essa l'autore analizza i commenti ricevuti sulla prima edizione ed aggiunge altre argomentazioni. La traduzione italiana, con la prefazione di Geymonat citata, è fatta sulla seconda edizione. A sua volta la traduzione italiana ha avuto una seconda edizione nel 1965, quasi in nulla differente da quella del 1964, seguita poi da altre. Quella attualmente in commercio, del 2005, a cura di A. Lanni, ha saggi di G. Giorello, G. O. Longo e P. Odifreddi, ma è priva della prefazione del Geymonat.
[6] Nell'anno accademico 1933-34 Ludovico Geymonat era assistente di Analisi Matematica all'Università di Torino, dove io frequentavo il I anno; si era laureato in Filosofia nel 1930 e in Matematica nel 1932.

superare la frattura oggi esistente fra le due culture ci apparirà, allora, come il frutto più maturo dello sviluppo culturale dell'umanità: come il compito più impegnativo di ogni studioso responsabile e coerente.

Fin qui il Geymonat. Tuttavia, la verifica sul campo mostra una situazione diversa. Se chi in giovinezza si dedica alle Scienze acquistando particolare perizia in alcune di esse conserva comunque una cultura umanistica, il viceversa è quasi sempre falso: chi si occupa di materie non scientifiche ignora di regola quali siano le condizioni che fanno di una disciplina una scienza. Nelle persone colte - che non siano dei matematici professi - la matematica non occupa alcun posto particolare: non ha peso. Ciò è dovuto a mio parere al modo con cui la matematica viene insegnata, come ricettario per risolvere alcuni problemi (dei quali non si insegna né l'origine né le conseguenze nello sviluppo della civiltà e in particolare del pensiero filosofico).

Sebbene io non aderisca a filosofie di tipo idealistico, ma piuttosto alle correnti che hanno avuto origine nelle ricerche di Ernst Mach e di Henri Poincaré ed un più ampio sviluppo nell'opera dei filosofi del circolo di Vienna e dei loro continuatori, credo che non si formi vera cultura senza storia della medesima. Apro una parentesi citando qui gli scienziati che hanno influenzato il mio pensiero, indicando alcune delle loro opere che riguardano il nostro problema.

Ernst Mach (1838-1916), tedesco, nacque in Moravia e fu professore di fisica dapprima a Graz, quindi a Praga per quasi trent'anni, e infine professore di filosofia a Vienna. Fu un insigne esponente dell'empiriocriticismo, o filosofia dell'esperienza pura, che sosteneva un empirismo radicale. Con la sua opera fondamentale *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* (1883) egli opera una profonda revisione critica della meccanica e dei concetti di tempo, spazio, massa e moto assoluto[7]. Fece anche studi fondamentali in aerodinamica, e varie grandezze portano il suo nome[8]. Spunti sul problema delle due culture ha anche *Erkenntnis und Irrtum* (1905)[9].

Jules-Henri Poincaré (1854-1912), francese, scrisse oltre 30 volumi e 500 memorie. Si dedicò a moltissime branche della matematica sia pura che applicata; sulla meccanica celeste restano alcune delle sue opere maggiori (*Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste*, 3 voll., 1892-1899) che ebbero numerose edizioni; del pari fondamentali sono le sue opere sulla topologia, termine di oggi che egli indicava con un termine latino, *Analysis situs*, e che uscirono, a partire da una memoria fondamentale del 1895, per oltre quindici anni. Poincaré si spostò poi su quello che chiameremo "filosofia della scienza", con *La science et l'hypothèse* (1903)[10] e *La valeur de la science* (1904)[11]. Al problema delle due culture, in particolare alla filosofia che sta dietro alla matematica e al suo insegnamento, sono dedicati vari saggi più tardi, poi raccolti sotto il titolo *Science et Méthode* (1908)[12].

Rudolph Carnap (1891-1970), filosofo e logico tedesco, neopositivista, esponente del Circolo di Vienna, fondatore con Reichenbach della rivista *Erkenntnis* (1930-1933). Si occupò del linguaggio umano, a cui sono dedicate varie opere, tra

[7] L'opera, che era già *in nuce* in uno scritto di Mach del 1872, ebbe varie altre edizioni, dalla seconda del 1888 fino alla settima del 1912, che fu l'ultima curata da Mach. Ne uscì una ottava nel 1921, nella quale il discepolo Petzold aggiunse un proprio contributo sull'empirismo di Mach e la teoria della relatività; la nona edizione del 1933 uscì a cura del figlio Ludwig Mach. Una prima traduzione italiana fatta da D. Gambioli, con introduzione di G. Vailati, comparve nel 1908, dopo le traduzioni in inglese (1893) e in francese (1904, con una prefazione di E. Picard) e prima di quella in russo. Una successiva edizione italiana a cura di A. D'Elia, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringhieri, 1977, ristampata nel 1992, contiene un pregevole saggio critico e riporta anche tutte le prefazioni alle varie edizioni tedesche. La questione della meccanica era già stata affrontata da Mach sul piano storico in uno scritto uscito a Praga nel 1872, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*: "Lasciamoci condurre per mano dalla storia; la storia ha fatto tutto, la storia può cambiare tutto." La critiche di Mach all'atomismo furono però contrastate da Boltzmann e Planck.

[8] In particolare il *numero di Mach* M indica il rapporto tra la velocità di un corpo in un fluido e la velocità del suono nello stesso fluido. Nell'aria il numero M=1 divide le velocità subsoniche da quelle supersoniche..

[9] Trad. italiana: *Conoscenza ed errore*, Boringhieri, 1968.

[10] Si tratta di un corposo libretto, scritto con estrema chiarezza. Sono esaminati i numeri, le grandezze, lo spazio, la forza, la natura. Poincaré non crede che la natura fisica possa essere completamente trattata solo con formule matematiche e riconosce che le condizioni iniziali del fenomeno possono determinarlo in un senso o nell'altro. Oggi la creazione di enormi effetti nati da piccole cause è noto come "effetto farfalla": basta che una farfalla batta le ali a New York perché si sviluppi un uragano a San Francisco…. La prima trad. italiana è *La scienza e l'ipotesi*, La Nuova Italia, 1950; attualmente si trova sotto uguale titolo un'edizione della Dedalo (1989).

[11] In quest'opera l'autore mette a confronto la verità matematica con quella fisica, nonché la diversità del modo di accedervi. La prima trad. italiana è *Il valore della scienza*, La Nuova Italia, 1947. Attualmente si trova sotto uguale titolo un'edizione della Dedalo (1992).

[12] Trad. italiana: *Scienza e metodo*, Einaudi, 1997.

le quali ricordiamo *Die logische Syntax der Sprache* (1934)[13] e *La science e la métaphysique devant l'analyse logique du langage* (1934).

Hans Reichenbach (1893-1953), filosofo e matematico tedesco, si occupò principalmente dei rapporti tra filosofia e fisica (*The rise of scientific phylosophy* (1951)[14]), sostenendo una concezione probabilistica del nesso tra esperienza e leggi fisiche, e giunse ad una definizione della probabilità basata sulla frequenza..

Philipp Frank (1884-1966), fisico e filosofo della scienza austriaco, esponente del neopositivismo e fondatore del circolo di Vienna: *Modern science and its phylosophy* (1950).

Jacque Monod (1910-1976), biologo francese, premio Nobel per la medicina assieme a Jacob (1965). Studiò il controllo genetico della sintesi degli enzimi nei batteri. In *Le hasard et la nécessité* (1970) si occupò delle implicazioni filosofiche delle conoscenze biologiche, rifiutando la concezione finalistica dell'uomo.

François Jacob (1920-), biologo francese, premio Nobel per la medicina assieme a Monod (1965): *Le jeu des possibles* (1981)[15].

Chiudiamo la parentesi riguardante i pensatori che mi hanno influenzato sul problema che stiamo trattando e torniamo al punto cruciale. Dicevamo dunque che è necessario insegnare la matematica non come un semplice ricettario per la soluzione di problemi di cui per lo più sfugge allo studente il significato. Un esempio di ciò che non si deve fare ce lo dice in modo piacevole la grande scrittrice Marguerite Yourcenar in *Les yeux ouvert* (1980)[16]:

> *L'aritmetica non era davvero il mio forte, i problemi li trovavo molto stupidi: qual è la somma che si ottiene riempiendo un cestino con tre quarti di mele, un ottavo di albicocche e due sedicesimi di qualcos'altro? Non vedevo proprio il problema; mi domandavo perché mai si dovesse combinare un cestino a quel modo e, di conseguenza, non vedevo soluzioni possibili.*

Nell'università la situazione è meno grave, la matematica essendo vicina alla scienze naturali, e linguaggio necessario delle medesime. Tuttavia anche nell'insegnamento universitario manca in generale il riferimento storico-filosofico, quello che illumina la genesi e il significato stesso delle teorie matematiche. Più grave è la situazione nei licei, dove soltanto un quadro umanistico eviterebbe l'assurdo di cui si è detto all'inizio: la mancanza della matematica nella cultura della maggior parte delle persone colte. Ciò è dovuto essenzialmente all'eredità della riforma dovuta al ministro Gentile, allievo del Croce.

Qui leggo soltanto due passi di Benedetto Croce, entrambi dal vol. 2° della sua celebrata *Filosofia dello spirito*: (Logica, parte II, Cap. VI: *Le matematiche e la scienza matematica della natura*) [17]:

> *Del procedere matematico può valere come esempio qualsiasi operazione dell'aritmetica. Prendiamo la moltiplicazione 4 x 4 = 16 […] Che cosa da siffatta uguaglianza si apprende circa la realtà, fenomenica o assoluta, a cui aspira la mente umana? Nulla di nulla […] Quando qualcuno ci promette di somministrarci quattro lire al giorno, e noi vogliamo sapere la totalità di lire, ossia l'oggetto che avevamo disponibile dopo quattro giorni, eseguiremo l'operazione 4 x 4 = 16; quando avremo da dividere 32 lire in parti uguali tra noi e un altro ricorreremo all'altra formula: 32 : 2 = 16. La matematica non serve a conoscere, ma a contare e a calcolare il già conosciuto.*
>
> ……
>
> *Senonché, escluso che essi* [i principi] *sieno a posteriori ed empirici, e riconosciuti come a priori, le difficoltà non cessano con questo. L'apriorità di quei principi ha altri caratteri, molto singolari, che li rendono dissimili dalle cognizioni a priori della filosofia, dalla coscienza degli universali e dei valori, e per esempio, del valore logico o di quello morale. È infatti impossibile pensare che i concetti del vero e*

[13] Trad. italiana: *Sintassi logica del linguaggio*, Silva, Milano, 1961; 2a ed. 1966. La traduzione italiana, che ha avuto come guida la traduzione inglese del 1937, ha un ricco apparato di note particolarmente utile per quanto riguarda la terminologia.
[14] Trad. italiana: *La nascita della filosofia scientifica*, Bologna, Il Mulino, 1961.
[15] Trad. italiana: *Il gioco dei possibili*, Mondadori, 1983.
[16] Trad. italiana: *Gli occhi aperti*, Bompiani, 1982.
[17] Croce espose la sua *Logica* all'Accademia Pontaniana in tre tornate del 1904 e 1905, sotto il titolo *Lineamenti di una Logica come scienza del concetto puro*, e tale memoria fu poi inserita nel vol. XXXV degli *Atti* di tale Accademia, uscito a Napoli nel 1905. Un rifacimento sostanzioso egli operò nel 1908, cambiando anche la struttura dei capitoli, e quindi pubblicò una edizione definitiva nel 1916, con un certo rifacimento esteriore di parole, ma non di concetti. Numerose edizioni successive ebbero tutte leggeri cambiamenti di forma, ragion per cui la citazione del Richard qui riportata non si ritrova con le stesse parole, bensì con frasi un po' diverse, nelle edizioni oggi reperibili.

del buono non siano veri; ma è, invece, impossibile pensare che i principi della matematica sieno veri. Anzi, considerati rigorosamente, essi risultano tutti, e del tutto, falsi.

A cosa dunque serve la matematica? Risponde Croce: a fare la nota della spesa.

Torno un momento alla riforma Gentile. Egli inventò un liceo, chiamato scientifico, in cui la matematica era poverissima e lo è tuttora; si pensi al numero di ore e al programma quasi del tutto insulso. Naturalmente, l'abnegazione di un insegnante molto preparato può dare ugualmente risultati buoni, ma questa osservazione è applicabile a qualunque materia mal programmata. Che si può fare? Una prima cosa è tenere, nell'insegnamento, ben presente la storia; un'altra è mettere in evidenza i percorsi del pensiero, i motivi che hanno generato certi studi e certe scoperte, i fini che tali studi dovevano raggiungere, le critiche successive. Ecco come procederei se dovessi disegnare un programma per l'insegnamento medio.

La matematica dei primitivi - Il riconoscimento di una proprietà astratta che certi gruppi hanno in comune, e che chiamiamo *numero*, rappresenta un grande passo verso la matematica moderna. Non è verosimile che tale riconoscimento sia stato dovuto alla scoperta di un singolo individuo, si trattò certamente di una consapevolezza graduale che si è sviluppata ad uno stadio primitivo. Che lo sviluppo del concetto di numero sia stato un processo lungo e graduale è indicato dal fatto che in greco i primi quattro numeri sono declinabili, in latino i primi tre, mentre la maggior parte della lingue moderne fa soltanto una distinzione tra numero al singolare e al plurale. Le prime certezze nell'introduzione dei numeri e dei sistemi di numerazione si ottengono facendo riferimento ai ritrovamenti paleolitici: l'osso di lupo paleolitico trovato a Vestonice (Moravia) presenta 55 incisioni parallele, 25 delle quali divise in gruppi di 5. La base di numerazione usata è 5, giacché l'osservazione delle mani e dei piedi aveva reso familiari ai primitivi i multipli di cinque. Le basi di numerazione più usate sono state

(10) (5, 10) (20) (5, 20)

in uso, ad esempio, presso popoli tra di loro distantissimi, come i Maya e i Celti.

La matematica delle civiltà superiori - Quali erano le conoscenze degli *egiziani* e dei *babilonesi* in campo matematico? Qui ci aiuta l'archeologia: essi conoscevano molte formule pratiche e avevano calcolato delle buone approssimazioni di π. Ma siamo ancora ben lontani da un "modo di pensare matematico" fatto di implicazioni successive, di ipotesi e tesi, di strutture logiche. È stato faticoso ottenere nei secoli quello che oggi pare ovvio. A molti risultati, probabilmente, quei popoli erano pervenuti sperimentalmente. La matematica vera e propria è stata inventata dai popoli dell'Egeo: i *Greci*. La dimostrazione, concepita come passaggio (ἀπαγωγή) dall'ipotesi alla tesi, si trova per la prima volta negli *Elementi* (Στοιχεῖα) di Ippocrate di Chio (circa 450 a. C., appartenente alla scuola ionica).

L'opera principale della cultura matematica ellenica è l'universalmente nota raccolta degli *Elementi* di Euclide (3° sec. a. C., scuola di Alessandria). Per secoli questo "manuale" (con tale intendimento infatti era stato scritto) è stato oggetto di studi e di ammirazione: in esso ciò che è più sorprendente ed innovativo è il rigoroso sistema di esposizione degli argomenti, la deduzione logica dei risultati dalle premesse tramite proposizioni conseguenti, il perfetto concatenamento dei teoremi. È questa la grande novità, il grande salto di qualità tra le culture precedenti e quella ionico-ellenistica. Non voglio con ciò sostenere che tutto quello che veniva formulato con un nuovo rigore dai greci fosse già stato scoperto in precedenza; notevolissime sono, soprattutto nel campo geometrico, le novità. Tali novità, tuttavia, sono una conseguenza diretta del metodo: metodologia e risultati sono quindi strettamente legati; dell'immenso apporto culturale del mondo ellenico ed ellenistico la matematica fa parte, e non può venire trascurata nella storia del pensiero. Di questa concatenazione, della partecipazione della matematica alla cultura, sono un esempio le etimologie di alcuni termini matematici, come "teorema" o "dimostrazione".

Segnaliamo qui come alcuni termini di uso comune in greco abbiano poi acquisito un significato particolare nell'uso matematico:

μάθημα = scienza, disciplina, studio
μάθησις = apprendimento, cognizione
μαθηματικός = desideroso di imparare; οἱ μαθηματικοί = i matematici
τὰ μαθηματικά = le cose che riguardano i matematici, la matematica
θεώρημα = spettacolo, cosa degna di essere vista
ἀπαγωγή = il condurre da un luogo ad un altro, dimostrazione
ἀδύνατος = impossibile
ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον = il condurre verso l'impossibile, dimostrazione per assurdo.

Ma ancora più significativo è ricordare, per sottolineare l'importanza della matematica come parte fondamentale del sapere greco, la tradizione secondo la quale Platone, fondando l'Accademia, avrebbe fatto scrivere sull'ingresso la frase:

ἀγεωμέτρητος μὴ εἰσίτω· μηδεὶς ἀγεωμέτρικος εἰσίτω *chi non conosce la geometria non entrerà; nessuno senza la geometria entrerà*

ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμετρίζει
dio usa sempre la geometria
(frase attribuita da Plutarco a Platone)

Qui viene intesa, come di regola presso gli antichi, per "geometria" la totalità della matematica.

Tuttavia fino a Pitagora c'era la concezione secondo la quale, sia in geometria che nelle questioni pratiche e teoriche della vita umana, tutto era spiegabile in termini di numeri interi e dei loro rapporti. Non si sa quando e come sia stata fatta la scoperta che all'interno della geometria stessa tali numeri non sono in grado di spiegare semplici proprietà fondamentali come, ad esempio, il rapporto tra la diagonale di un quadrato o di un pentagono regolare e il rispettivo lato. I segmenti sono incommensurabili per quanto piccola sia l'unità di misura che si sceglie. I *Dialoghi* di Platone mostrano che la comunità matematica greca era rimasta stupefatta da tale scoperta. Leggo un brano del *Teeteto*[18]:

> *Tutta la serie dei numeri dividemmo in due classi: ogni numero il quale ha la possibilità di derivare dalla moltiplicazione fra loro di due fattori uguali, lo rassomigliammo nella figura a un quadrato, e lo chiamammo numero quadrato o equilatero*[19]*. [Gli altri numeri] li rassomigliammo alla figura oblunga e li chiamammo numeri oblunghi. Tutte le linee i cui quadrati equivalgono al numero equilatero e piano le definimmo lunghezze, e tutte le altre i cui quadrati equivalgono al numero oblungo le definimmo potenze, per il fatto che - in misura lineare - non sono commensurabili a quelle lunghezze, ma nel valore della superficie quadrata che esse potenziano, sì.*[20]

Mi piace far notare qui come nel IV secolo a. C. non ci sia alcuna separazione tra le due culture; nel dialogo di Platone appena citato Socrate incontra Teeteto, un giovane destinato a divenire un grande matematico dell'Accademia, e comincia a discutere con lui a proposito di una lezione del matematico Teodoro sui numeri commensurabili e incommensurabili: in che senso esistono questi numeri? Il filosofo è esperto di matematiche, e del resto la matematica di Teeteto non è concepibile fuori della critica filosofica: quanti problemi ha creato e crea di continuo il verbo "esistere"? Socrate conclude che i numeri incommensurabili esistono "in potenza".

Importante, questo esistere "in potenza": "Qual è la grammatica del verbo "esistere"?" direbbe un filosofo moderno della matematica.

Sempre nell'ambito delle proposte per l'insegnamento sarebbe interessante seguire l'intera evoluzione di certi problemi nel passaggio da una cultura all'altra. Un esempio classico è quello del π (letto in italiano: *pi greco*); questo numero ha fatto lavorare i matematici per secoli. Una prima stima approssimata è quella degli egizi, che trovarono per l'area del circolo

$$A = (d - d/9)^2 \qquad \text{con } d = \text{diametro del circolo,}$$

da cui si ricava $\pi = 256/81 \approx 3{,}1605$.

Più modesta è la stima che fecero i babilonesi, trovando $\pi \approx 25/8 = 3{,}125$. Tale stima, con una approssimazione ancora peggiore, la ritroviamo nella cultura ebraica; infatti, mille anni dopo, nei testi dell'Antico Testamento si hanno due menzioni della misura di $\pi \approx 3$ in due passi diversi, ma riferiti allo stesso evento: la costruzione del Tempio a Gerusalemme. Nei *Re*, I, VII, 23 si parla degli arredi del Tempio fatti installare da Salomone in questi termini:

> *Fece pure il mare di bronzo, che misurava dieci cubiti da un orlo all'altro: era perfettamente circolare, profondo cinque cubiti, con una circonferenza di trenta cubiti*.[21]

---

[18] Questa traduzione si trova in *Dialoghi*, vol. I, Laterza, 1931. Attualmente è in commercio un'edizione con una traduzione leggermente diversa.
[19] Con la terminologia italiana di oggi si direbbe "quadrato perfetto".
[20] L'espressione, letta oggi, risulta un po' oscura. Essa significa: se prendiamo un quadrato la cui superficie è esprimibile tramite un numero intero che risulta un quadrato perfetto, il suo lato è un numero intero e viene chiamato "lunghezza"; se prendiamo un quadrato la cui superficie è esprimibile tramite un numero intero, ma diverso da un quadrato perfetto, il suo lato (che non è più un numero intero) lo chiamiamo "potenza": le "potenze" non sono commensurabili con le "lunghezze", ma quando ne facciamo il quadrato sia le une che le altre danno un numero intero.
[21] *La Sacra Bibbia*, ed. Paoline, 1968. La traduzione è eseguita su testi originali. Nelle carte del Richard si trova annotata una lezione latina, probabilmente della *Vulgata*, con queste parole: *Fecit quoque mare fusile decem cubitorum a labio usque ad labium, rotundum in circuitu, quinque cubitorum altitudo ejus, et resticula triginta cubitorum cingebat*

Un'approssimazione significativamente migliore è quella che si legge in Archimede, che colloca π entro un intervallo compreso tra 3 + 10/71 e 3 + 10/70, cioè tra 3,1408 e 3,1428. Considerando che se ci si arresta alle prime quattro cifre decimali e si prende il valore centrale dell'intervallo risulta π = 3,1415, vediamo che Archimede trova un'approssimazione con le prime due cifre decimali giuste e il centro del suo intervallo di approssimazione dà anche la terza e la quarta cifra giuste: siamo quindi con un'approssimazione a meno di 2/1000. Notiamo che mentre le altre approssimazioni erano date con numeri decimali approssimati Archimede fornisce un intervallo, utilizzando poligoni di 96 lati iscritti e circoscritti al cerchio. La sua opera ci è stata tramandata attraverso Eutocio di Ascalona, matematico del 5°-6° sec. d. C. che ci ha lasciato commenti sulle opere di Archimede e di Apollonio. In particolare, il libro oggi classificato come terzo delle opere di Archimede è intitolato ̓Αρχιμήδους κύκλου μέτρησις, e dopo sette pagine di dimostrazione con figure riporta la seguente conclusione:[22]

̔η ἅρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ̔εβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ϊ οά μείζων.[23]

Nonostante il trattato di Archimede sulla misura del circolo, non essendosi trovato un procedimento per rettificare la circonferenza con i mezzi classici della geometria greca (riga e compasso), il mistero di π attraversa i millenni. Così Dante Alighieri, contemplando il simbolo circolare del Mistero della Trinità (*Par.* XXXIII, vv. 116-117):

de l'alto lume parvemi tre giri
di tre colori e d'una contenenza

si riporta a quello che era il massimo mistero matematico degli antichi (*Par.* XXXIII, vv. 133-136):

Qual è 'l geometra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova
Pensando, quel principio ond'elli indige

Tal era io a quella vista nova.

Anche Petrarca sembra essere stato affascinato da π e la struttura stessa del sonetto sembra essere ispirata a questo numero. È quanto sostiene W. Potters[24] nella nota *Chi era Laura? - Strutture linguistiche e matematiche nelle "Rime" di Francesco Petrarca*[25]. In tale lavoro il Potters scrive:

nell'autografo Cod. Vat. 3195 il Petrarca (come altri poeti del tempo) scrive il suo sonetto non in 14 endecasillabi distribuiti su 4 strofe ma in 7 endecasillabi doppi: in 7 per 22 sillabe.

I due numeri 7 e 22 costituiscono la base di una spiegazione matematica del sonetto: e della sua natura poetica e della sua origine. I dettagli della tesi sono i seguenti.

Anzi tutto il sonetto scritto nel detto modo sembra alludere al ben noto cerchio di Archimede, cioè il cerchio di raggio r *= 7, in cui il matematico greco ha riassunto i risultati della sua "misurazione del*

---

illud per circuitum. Tale versione appare dedotta piuttosto dalle *Cronache*, II, IV, 2; infatti c'è nelle carte trovate anche una menzione del *Liber secundus paralipomenon*, dove appunto "Paralipomeni" è il titolo dato nella versione greca dei Settanta ai testi dell'Antico Testamento intitolati *Cronache* nel testo ebraico; si tratta di "cose tralasciate" che vengono tuttavia a conferma delle gesta di Davide e Salomone. Non ci addentriamo nella problematica della accettazione come Libri Sacri della *Cronache*; la traduzione italiana di tale passo, riportata nella *Bibbia di Gerusalemme*, ed. Dehoniane Bologna, 1982[5], così recita: *Fece la vasca di metallo fuso del diametro di dieci cubiti, rotonda, alta cinque cubiti; ci voleva una corda di trenta cubiti per cingerla.* Come abbiamo accennato all'inizio, della matematica ebraica il Richard si era già occupato in una ricerca intitolata "Su una questione di aritmetica neotestamentaria", pubblicata negli Atti e memorie dell'Accademia Patavina di Scienze, Lettere ed Arti, vol. XCIV (1981-82), Parte II: Classe di Scienze Matematiche e Naturali. Egli aveva infatti trovato nei riferimenti evangelici (i tre sinottici e un apocrifo), in alcuni libri dell'Antico Testamento e nei manoscritti del Mar Morto le tracce di un'eredità culturale matematica egizia (prima cattività) e babilonese (deportazione).

[22] La citazione è come riportata dall'edizione critica *Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii*, Volumen I, iterum edidit J. L. Heiberg, Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri., MCCCCX. Le edizioni Teubner di testi classici erano redatte in latino.

[23] La traduzione latina dell'edizione Teubner suona: *ergo ambitus circuli triplo maior est diametro et excedit spatio minore quam 1/7, maiore autem quam 10/71.* Archimede fu tradotto in latino da F. Maurolico a metà del 16° sec., e l'opera che stiamo considerando è apparsa con il titolo *Archimedis de circuli dimensione libellus.*

[24] Nel 1984 presso l'*Institut für Romanische Philologie an der Universität*, Würzburg (DE).

[25] Atti Acc. Sc. Torino, Vol. 118 (1984), pp. 165-188, con nota del presentatore Tullio Viola.

cerchio"[26]*. Le grandezze basilari di tale cerchio sono identiche ai numeri fondamentali nella versificazione del sonetto classico. Il cerchio in questione, con cui Archimede ha ideato il metodo idoneo a calcolare il valore* c/d *(= al numero trascendente* π*) è caratterizzato precisamente dalle misure seguenti cui corrispondono altrettante misure basilari del sonetto:*

Cerchio		Sonetto
(raggio)	r = *7*	*7 = versi nell'autografo Cod. Vat. 3195*
(diametro)	d = *14*	*14 = numero di endecasillabi rimati*
(semicirconferenza)	c/2 = *22*	*22 = sillabe di un verso nell'autografo*
(circonferenza)	c = *44*	*44 = sillabe dell'unità linguistico-versificatoria della "quartina"*
(area)	A =*154*	*154 = totale di sillabe del sonetto*
(c/d)	π = *22/7*	*22/7 = misure del sonetto nel Cod. Vat. 3195*

Le concordanze numeriche fra sonetto e cerchio di r *= 7 permettono di assumere, come punto di partenza della nostra teoria, le due ipotesi seguenti fra loro strettamente legate:*

a) definire l'essenza vera e propria del sonetto in una formula matematica: SONETTO = CERCHIO DI RAGGIO r *=7, o più precisamente CERCHIO DEL SONETTO =* (c/2)*/r = 22/7 =* π*;*
b) formulare una nuova teoria sulla nascita del sonetto scaturito dall'ispirazione di trasformare in poesia la famosa soluzione scientifica del cerchio trovata da Archimede. Si prenda in considerazione che Giacomo da Lentini (morto verso il 1250), tradizionalmente ritenuto inventore del sonetto, era uno dei funzionari dotti *riuniti alla corte palermitana di Federico II: un noto passatempo di questo gruppo di poeti eruditi erano … le gare matematiche*[27]*.*

Nel mondo occidentale negli anni bui dell'Alto Medioevo la matematica, e non solo quella, conobbe un'eclissi totale. La cultura matematica greca era stata ereditata ed in parte sviluppata dagli arabi; è grazie anche a loro che ci sono giunte le opere di Euclide e di alcuni grandi matematici greci.

La rinascita matematica in occidente si può considerare abbia inizio con il monaco francese Gerberto d'Aurillac (c. 940 - 1003), che studia anche in Spagna con gli arabi e diviene poi, nel 999, papa Silvestro II. Egli scrisse testi di aritmetica e geometria[28] che probabilmente si rifacevano alla tradizione boeziana[29], che aveva dominato l'insegnamento nelle scuole matematiche occidentali e che non era stata migliorata. Gerberto tentò di conciliare la cultura greco-latina con quella arabo-indiana, e fu forse il primo ad portare in occidente l'uso delle cifre indo-arabiche.[30] Nel 1085 la presa di

---

[26] Il Potters si riferisce qui al brano di Archimede che abbiamo considerato precedentemente. In realtà Archimede non prende un cerchio di raggio 7: il numero 7 compare in maniera quasi cabalistica quando egli vuole effettuare dei poligoni iscritti nel cerchio.

[27] Il lavoro del Potters prosegue trattando anche un'altra combinazione numerica relativa al giorno e all'ora dell'innamoramento del Petrarca per Laura, con la conclusione piuttosto originale che Laura coincida con π, numero di cui il poeta si sarebbe "innamorato". Dal punto di vista matematico certe coincidenze non sono significative: una volta arrivati al rapporto 22/7 i restanti numeri ne sono una conseguenza, e il condurre avanti la divisione tra i due numeri interi per ottenere un maggior numero di cifre decimali non apporta nulla di più. Del pari, l'aver fissato il numero degli endecasillabi in un sonetto comporta automaticamente il numero delle sillabe, delle rime, ecc. Più che un tentativo di ottenere una migliore approssimazione di π, come ipotizzato dal Potters, si può attribuire al Petrarca una certa passione per la numerologia mistica medioevale, che spesso attribuiva a combinazioni numeriche, il più delle volte casuali, la soluzione nascosta di reconditi arcani. L'ipotesi che Petrarca fosse un matematico, ventilata dal Potters, è tuttavia messa in dubbio dallo stesso presentatore della nota presso l'Accademia torinese, Tullio Viola. Il Richard non prende posizione su questa delicata questione, limitandosi a citare il lavoro come indice del collegamento tra le due culture.

[28] Di lui ci restano anche opere filosofiche e teologiche, oltre ad un ricco epistolario.

[29] Severino Boezio, nato c. 480 da nobile famiglia romana, fu uno dei principali consiglieri di Teodorico; caduto poi in disgrazia, fu giustiziato nel 526 (altri ne collocano la morte nel 524). Egli può forse essere considerato il miglior matematico prodotto dall'antica Roma, però il livello delle sue opere è molto lontano da quello degli autori greci: si tratta di compendi scarni ed elementari di opere classiche precedenti. In particolare la sua *Geometria*, basata su Euclide, contiene soltanto gli enunciati, senza dimostrazioni, di alcuni dei teoremi più semplici dei primi quattro libri degli *Elementi*.

[30] L'introduzione del sistema posizionale arabo-indiano si diffuse piuttosto lentamente nel mondo occidentale e convisse per secoli con le espressioni numeriche latine, che però avevano già avuto un'evoluzione in un sistema di numerazione detto *indigitatio*, usato dai Romani, ma noto a tutti i popoli del bacino del Mediterraneo, dove in parte è in uso tuttora. Si tratta di un sistema di espressione dei numeri tramite le dita della mano, ottenuto con contatti tra il pollice e le diverse falangi e con il piegamento e distensione di alcune falangi di questo o quel dito. Il venerabile Beda (672-735), dottissimo maestro inglese, ne espose chiaramente le regole nella sua opera *Liber de loquela per gestum digitorum*, che

Toledo, già appartenente al califfato di Cordova, da parte di Alfonso VI re di León e di Castiglia rese facile l'accesso alle biblioteche della città che contenevano una grande quantità di manoscritti musulmani; la popolazione, comprendente cristiani, maomettani ed ebrei, parlava in maggioranza l'arabo, e questo facilitò il flusso di informazioni tra le varie culture. Molti furono i traduttori, provenienti da varie parti d'Europa, che svolsero la loro attività in Spagna. Uno dei più attivi e capaci fu Gerardo da Cremona (1114-1187) che tradusse oltre 80 opere di matematica dall'arabo al latino, e tra queste una traduzione araba degli *Elementi* di Euclide[31].

Grazie alla riscoperta delle antiche fonti ed all'insegnamento arabo, nel tardo Medio Evo vi furono due gruppi di matematici: quelli attivi nelle scuole ecclesiastiche o nelle università e quelli impegnati nel commercio e negli scambi. Ad entrambi dobbiamo l'introduzione delle cifre indo-arabe (zero compreso) ed il calcolo mediante queste[32]. Un matematico di capacità fuori dal comune fu Leonardo Pisano, più noto come Fibonacci (1180 - c. 1250), un mercante figlio di un mercante pisano che aveva affari nell'Africa settentrionale. Il Fibonacci studiò con un maestro musulmano ed ebbe l'occasione di viaggiare in Egitto, Siria, Grecia. Nel 1202 pubblicò il *Liber abaci* nel quale discute in modo esauriente metodi e problemi algebrici, difendendo con energia l'uso delle cifre indo-arabe. Fibonacci era soprattutto un algebrista, tuttavia nel 1220 pubblicò anche il libro *Practica geometriae*, che sembra in larga parte basato su una versione araba del trattato euclideo sulla "Divisione delle figure" che non ci è pervenuto. Senza dubbio il problema del *Liber abaci* che più ispirò i futuri matematici era il seguente:

> *quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese e nel caso che la produttività non si arresti?*

Questo famoso problema dà origine alla *successione di Fibonacci*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

dove ciascun termine è la somma dei due termini immediatamente precedenti, cioè

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$$

Tale successione[33] possiede molte eleganti proprietà, tra le quali quella che il limite per n che tende all'infinito del rapporto c_n/c_{n+1} risulta uguale a $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}618033\dots$, che è il valore della *sezione aurea* di un segmento di lunghezza 1. Tale sezione aurea è il numero x definito dalla proporzione: il segmento di lunghezza 1 sta a quello di lunghezza x come questo sta alla lunghezza del segmento restante, cioè $1 : x = x : (1 - x)$, da cui la sezione aurea x risulta essere la soluzione positiva tra le due soluzioni dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$.

La sezione aurea per le sue qualità proprie[34] e per le sue applicazioni nel dominio delle arti è universalmente conosciuta. La ragione dell'ammirazione e dell'entusiasmo, si può dire religioso, che nei tempi antichi suscitò tale proporzione risiede almeno in parte nel fatto che il numero "irrazionale" era ritenuto allora come espressione dell'incommensurabilità di Dio. Nel Rinascimento l'immenso amore del bello e della perfezione dette alla sezione aurea tanta importanza da chiamarla *divina proportione*. Uno dei pochi teorici di questo numero fu il matematico fra Luca Pacioli[35]. Egli tiene, probabilmente nel 1497, un ciclo di conferenze a Ludovico il Moro spiegando la bellezza delle divina proporzione, fa amicizia con Leonardo (studiano insieme alcuni problemi di geometria), termina nel 1497 e stampa nel 1509 l'opera *De divina proportione* con illustrazioni di Leonardo. Gli studiosi hanno ritrovato anche nel profilo di Isabella d'Este di Leonardo la divina proporzione: precisamente nel rapporto tra l'altezza del viso (preso alla

---

rimase per tutto il Medio Evo un testo assai usato per l'insegnamento dell'aritmetica. Il sistema non è ancora un sistema posizionale come quello arabo-indiano, ma può in parte assomigliarvi. Ancora Luca Pacioli nella sua *Summa* (1494) lo presenta con efficaci illustrazioni.

[31] Gerardo da Cremona si recò a Toledo per studiarvi l'*Almagesto* di Tolomeo e ne effettuò la traduzione dall'arabo al latino. Tradusse molte altre opere originali di autori arabi, come Avicenna e al-Khuwarizmi, e molte versioni arabe di originali greci.

[32] Ci furono molte difficoltà e diffidenze di fronte all'introduzione della numerazione indo-araba che usiamo attualmente. A Siena e Firenze essa era ancora proibita nel 1299 (vd. Statuti dell'Arte del Cambio). Essa è invece l'unica usata nei libri contabili dei Medici dal 1496.

[33] Ovviamente va inteso che la successione ad un certo punto si ferma dopo 12 mesi, sempre nell'ipotesi che non vi sia cessazione della produzione di conigli da parte di nessuna coppia durante l'anno considerato.

[34] Essa è anche il rapporto tra le lunghezze del lato e della diagonale di un pentagono regolare.

[35] Luca Pacioli (1445 - c. 1510), uomo colto, uno dei pochi teorici delle proporzioni, si è conquistata, per il momento in cui visse e le sue importanti amicizie, una fama durevole. "A lui si pensa come all'amico di Leon Battista Alberti e di Leonardo, come al discepolo di Piero della Francesca, come all'esponente più qualificato di uno degli ambienti più ricchi di genialità e di idee che ci siano mai stati nella storia della cultura." (P. Portoghesi, *Luca Pacioli e la "divina proportione"*, in *Raffaello e la sezione aurea*, Bora, 1984, pubblicato in celebrazione del V centenario della nascita di Raffaello e arricchito di una corposa bibliografia sull'argomento). Studioso di matematica pura e applicata, si interessò di architettura, di prospettiva e contabilità (fu uno dei primi a trattare la teoria della partita doppia nelle operazioni contabili). Nel 1994 lo stato italiano gli ha dedicato un francobollo e ne ha impresso l'effigie su una moneta da £ 200.

sommità del cranio) e la distanza tra l'arcata dei sopraccigli e l'estremità del mento, ed anche nel rapporto tra la distanza che passa fra la base del naso e quella del mento con la distanza fra il labbro inferiore e la base del mento, cioè

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\text{altezza del viso}}{\text{sopraccigli - base del mento}} = \frac{\text{base del naso - base del mento}}{\text{labbro inferiore - base del mento}}$$

Numerosi sono gli studi che hanno riconosciuto nelle opere di Piero della Francesca, Raffaello, Tiziano, Veronese, Rubens, El Greco e altri la presenza della "divina proporzione". Nessuna separazione tra la matematica e la cultura umanistica del tempo!

La matematica aveva avuto nel Rinascimento ampie applicazioni - dai libri di conto alla meccanica, dall'agrimensura all'arte figurativa, dalla cartografia all'ottica - e numerosi erano i libri dedicati alle arti pratiche e tecniche. Continuò anche ad essere forte l'interesse per le opere classiche dell'antichità. Per tutta la prima metà del sec. XVI la geometria era rimasta troppo legata alle proprietà elementari descritte da Euclide. Si deve sostanzialmente ai due dotti Francesco Maurolico (1494 - 1575), un prete siciliano di origine greca, e Federico Commandino (1509 - 1575) se la geometria di Archimede, di Apollonio e di Pappo fu portata a conoscenza degli studiosi. Infatti costoro si dedicarono a traduzioni dal greco delle opere di Archimede; una traduzione latina di Commandino fu stampata a Venezia nel 1558[36]. Quattro libri delle *Coniche* di Apollonio erano stati conservati in greco: essi vennero tradotti in latino e stampati a Venezia nel 1537, mentre la traduzione di Commandino fu stampata a Bologna nel 1566. La *Collezione matematica* di Pappo era rimasta sconosciuta agli arabi e ai matematici dell'Europa medievale, ma anche questa venne tradotta da Commandino, sebbene sia stata stampata soltanto nel 1588. Maurolico era a conoscenza dei tesori della geometria antica (era infatti in grado di leggere il greco ed ovviamente il latino che allora era la lingua della scienza) che si erano resi disponibili fra il 1450 e il 1550. Anzi, sulla base di alcune indicazioni contenute in Pappo concernenti l'opera di Apollonio sui massimi e minimi, Maurolico tentò di ricostruire il Libro V delle *Coniche* allora perduto. Da questo punto di vista, Maurolico inizia una nuova moda che doveva diventare uno dei filoni principali della geometria fino a Descartes: la ricostruzione in generale di opere perdute ed in particolare degli ultimi quattro libri delle *Coniche*. Nel 1575, alla morte di Maurolico e Commandino, l'Europa occidentale aveva recuperato la maggior parte delle principali opere matematiche dell'antichità che ci sono pervenute fino ad ora. L'algebra degli arabi era stata completamente assimilata e ulteriormente sviluppata attraverso la soluzione generale delle equazioni di secondo e terzo grado e attraverso un impiego parziale del simbolismo matematico. Tuttavia nel periodo di tempo che va dalla morte di Maurolico nel 1575 alla pubblicazione di *La géometrie* di Cartesio nel 1637, la geometria segnò il passo fino a che i progressi realizzati nell'algebra non ebbero raggiunto un livello tale da rendere possibile la creazione della geometria algebrica. Infatti le due branche della matematica, l'algebra e la geometria, che si erano sviluppate separatamente, furono messe sistematicamente in relazione da Cartesio (René Descartes, 1596 - 1650), che oggi è considerato il fondatore della geometria analitica. Già nel *Discorso sul metodo* del quale *La géometrie* era un'appendice, Cartesio aveva discusso i rispettivi pregi e difetti dell'algebra e della geometria. Accusava la seconda di dipendere eccessivamente da figure e rimproverava alla prima di essere una tecnica oscura e confusa. Lo scopo del suo metodo era pertanto duplice: liberare la geometria dal ricorso a figure, mediante i procedimenti dell'algebra e dare un significato alle operazioni dell'algebra per mezzo dell'interpretazione geometrica. Il procedimento da lui seguito nell'opera *La géometrie* fu quello di partire da un problema geometrico, tradurlo nel linguaggio di una equazione algebrica e, infine, dopo aver semplificato l'equazione il più possibile, risolvere questa geometricamente. Con questo metodo Cartesio affrontò difficili problemi che avevano impegnato gli antichi greci e passò a formulare generalizzazioni di alcuni di essi; ottenne così importanti risultati nel trovare la tangente e la normale a varie curve e nel calcolare la misura delle aree da esse delimitate, problemi che sono anticipazioni del moderno calcolo infinitesimale.

Ho messo in evidenza l'importanza del metodo di Descartes, ma il passaggio dalla matematica del Rinascimento all'inizio della matematica moderna, il calcolo infinitesimale, si realizzò anche attraverso molti altri studiosi di cui ricordo i più importanti: Keplero[37], Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli, Pierre Fermat, Blaise Pascal, arrivando così a Newton e Leibnitz, che sono i fondatori del moderno calcolo infinitesimale.

[36] La traduzione di Maurolico, completata già nel 1548, fu stampata solo nel 1654.

[37] Giovanni Keplero raccolse le sue considerazioni sulla misura di volumi in un libro pubblicato nel 1615 con il titolo *Stereometria doliorum*. Infatti si interessò del volume delle botti perché era un proprietario di vigne e si occupava della conservazione del vino; ciò lo indusse anche a interessarsi di problemi di massima capienza delle botti. Le sue idee furono sistematicamente sviluppate nel 1635 in un libro famoso, *Geometria indivisibilium*, scritto da Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), allievo di Galileo, nel quale ci sono i primi rudimenti del calcolo integrale moderno. Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* di Galileo si comincia a fare ricorso ad un'altra idea del calcolo infinitesimale: l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo. Così pure si inizia un confronto tra grandezze infinitamente piccole (che oggi si esprime con terminologia matematica come confronto tra ordini di infinitesimo).

Isaac Newton, nato nel 1642, si iscrisse al Trinity College a Cambridge nel 1661, forse senza la minima idea di diventare un matematico, poiché non aveva fatto ancora nessuno studio in quel campo. All'inizio del suo primo anno acquistò e studiò una copia degli *Elementi* di Euclide. Studiando le opere dei greci, la geometria di Cartesio, l'ottica di Keplero, e venendo a conoscenza delle opere di Galileo, di Fermat e di altri sembra che alla fine del 1664 Newton avesse ormai raggiunto i limiti della conoscenza matematica del tempo e fosse pronto a dare i propri contributi. Nei primi mesi del 1665 fece le prime scoperte grazie alla sua abilità nell'esprimere funzioni complicate mediante serie[38] di funzioni più semplici. Nello stesso anno Newton cominciò a riflettere sulla "flussione", ossia sulla velocità con cui variano grandezze capaci di muoversi con continuità, o "fluenti", come lunghezze, aree, volumi, distanze, temperature. Da allora in poi Newton collegò i problemi degli sviluppi in serie e delle velocità di variazione unificandoli in quello che egli chiamava "mio metodo". Per gran parte dell'anno accademico 1665-1666, subito dopo che Newton ebbe ottenuto il primo dei gradi universitari del tempo, il Trinity College rimase chiuso a causa della peste, e Newton tornò nella sua casa in campagna. Fu questo il periodo più fecondo di tutta la storia della matematica: in quei mesi Newton fece quattro delle sue principali scoperte, tra le quali il calcolo infinitesimale e la legge di gravitazione universale, anche se la pubblicazione dei suoi risultati avvenne molto più tardi. Tra le principali opere pubblicate segnaliamo:

Philosophiae naturalis principia mathematica (3 voll., 1686-87);
Tractatus de quadratura curvarum (1704);
De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (1711);
Methodus fluxionum et serierum infinitarum (1736, postumo).

Della prima delle opere menzionate merita qui un cenno l'edizione successiva del 1723, il cui frontespizio così si presenta:

Philosophiae naturalis principia mathematica, auctore Isaaco Newton equite aurato. Editio ultima, cui accedit analisys per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis.. Amstelodami sumptibus Societatis MDCCXXIII, colligebat Ascanius Varese patavinus, abbas generalis congr. Lateranensis, canonicis suis & sibi.

In tale edizione troviamo il principio di gravitazione universale espresso nei termini seguenti:

Propositio LXXI, Theorema XXXI: Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphaericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaereae vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab eodem centro.

Fu grazie alla scoperta di Newton che il calcolo basato sulle serie era in generale regolato dalle stesse leggi dell'algebra, che operava su quantità finite, se i matematici non cercarono più di evitare i processi infiniti, come avevano fatto i matematici greci: i processi infiniti vennero dai tempi di Newton considerati legittimi in matematica.

L'altro scopritore del calcolo infinitesimale fu Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), che all'università fece studi di teologia, legge, filosofia e matematica. Leibniz fu pure uno dei più grandi inventori di notazioni: dobbiamo a lui i simboli, oggi usati in matematica, per l'integrale, il differenziale e molti altri.

Newton e Leibniz si dividono il merito della scoperta del calcolo infinitesimale e ci furono aspre polemiche tra i sostenitori dei due scienziati in merito all'indipendenza ed alla priorità della scoperta. È oggi abbastanza chiaro che la scoperta di Newton precedette quella di Leibniz di circa dieci anni, ma che la scoperta di Leibniz fu fatta indipendentemente da quella di Newton. Inoltre a Leibniz va riconosciuta la priorità di pubblicazione: infatti una esposizione del suo calcolo apparve nel 1684 negli *Acta eruditorum* con il titolo *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.*[39]

Tornando ora a quanto già detto sulle due culture e sulla loro attuale separazione, ricordo che fino alla fine del sec XVIII l'uomo di Cultura, una e unica, era in grado di apprezzare e conoscere la matematica, se non altro come impostazione generale. Veniamo ad un esempio molto significativo: la collaborazione tra Denis Diderot (1713-1784) e Jean Le Rond D'Alembert[40] (1717-1783) per la pubblicazione dell'*Encyclopédie*. L'importanza di quest'opera nella cultura moderna è enorme, e il grande matematico D'Alembert (segretario perpetuo dell'Accademia di Francia dal 1754) ne è direttamente coinvolto, né la sua partecipazione può essere trascurata. Aggiungo che anche Diderot aveva una

[38] La serie è un procedimento di somma con infiniti termini.
[39] Altre opere notevoli di Leibniz sono: *De geometria recondita* (1686), *Nova calculi differentialis applicatio* (1694), *Specimen novum analiseos pro scientia infiniti* (1702), *Simbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis* (1710).
[40] Era figlio naturale di un generale di artiglieria e di una canonichessa, e fu abbandonato sui gradini della chiesa di Saint Jean Le Rond, da cui il nome. Il soprannome d'Alembert fu aggiunto quando il fanciullo fu iscritto alle scuole elementari. Il padre si occupò di lui e gli lasciò una rendita che gli permise di vivere senza un lavoro fisso.

buona conoscenza delle matematiche del suo tempo, tempo di grandi ripensamenti sul calcolo infinitesimale: si pensi ad esempio alla teoria della convergenza, elaborata appunto dal D'Alembert, che riteneva che la "vera metafisica" del calcolo infinitesimale andasse trovata nell'idea di limite[41]. Sul fronte della ricerca avanzata è da ricordare il suo *Traité de dynamique* (1743) contenente il principio che porta il suo nome[42]. Altri trattati di d'Alembert avevano per oggetto la musica (problema delle corde vibranti[43]), il problema dei tre corpi, la precessione degli equinozi[44].

Una delle caratteristiche dell'Età dell'Illuminismo fu la tendenza ad applicare a tutti gli aspetti della società quei metodi quantitativi che avevano dato risultati così brillanti nelle scienze fisiche. A tal riguardo non sorprende il fatto che d'Alembert abbia scritto su problemi come la speranza di vita, o sul numero medio di anni che a una persona restano statisticamente da vivere, sulla rendita di un vitalizio, sui giochi d'azzardo e altri aspetti delle scienze sociali[45]. Raccolse e studiò statistiche sull'esito della vaccinazione contro il vaiolo. Egli è ricordato anche da Giacomo Casanova (1725-1798) a proposito dell'introduzione della lotteria, la cui prima estrazione avvenne nel 1758 su suggerimento del Casanova stesso. Si legge infatti nelle *Mémoires*[46]:

> *… je me rendit à l'École Militaire, ou la conference s'ouvrit aussitôt que je fu arrivé. M. d'Alembert avait été prié d'y assister en sa qualité de grand aritméticien. Il n'aurait pas été jugé nécessaire si M. Duverney avait été seul; mais il y avait dans le conseil de têtes qui, pour ne pas se rendre au résultat d'un calcul politique, prenaient le parti d'en nier l'evidence…*

Il più grande matematico di tutti i tempi è quasi certamente Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Nato in una famiglia povera (suo padre era operaio), notato per i suoi risultati eccezionali a scuola, poté proseguire gli studi con l'aiuto del duca di Brunswick[47] fino ad iscriversi nel 1795 all'università di Gottinga. A tale data era ancora indeciso se studiare filologia o matematica, sebbene avesse già ottenuto in quest'ultima brillanti risultati, scoprendo ad esempio il principio dei minimi quadrati[48]. Il 30 marzo 1796 prese la decisione di dedicarsi esclusivamente alla matematica e alle sue applicazioni: in quel giorno infatti fece una brillante scoperta. Da oltre duemila anni si sapeva come costruire, con riga e compasso, il triangolo equilatero ed il pentagono regolare, ma non si era riusciti a costruire nessun altro poligono il cui numero dei lati fosse un numero primo. In quel giorno del 1796 Gauss costruì con riga e compasso il poligono regolare di diciassette lati. A partire da questo giorno egli cominciò a tenere un diario in cui annotava le sue maggiori scoperte: quella del poligono regolare di diciassette lati è la prima della lista, e seguono centoquarantasei risultati formulati brevemente; l'ultimo reca la data del 9 luglio 1814. Attraverso questo diario è possibile verificare la priorità delle scoperte di Gauss nei casi di risultati rivendicati da altri matematici; egli infatti era, come Newton, molto riluttante a pubblicare, e molti dei suoi pensieri più originali non furono mai pubblicati durane la sua vita[49]; il suo motto

---

41 Il concetto di limite così come lo conosciamo oggi maturò qualche decina di anni più tardi nell'esposizione operata da Cauchy.

42 Si tratta di un principio sintetico della dinamica dei sistemi secondo il quale durante un qualsiasi moto di un qualsiasi sistema materiale le forze perdute e le reazioni vincolari si fanno in ogni istante equilibrio. Pertanto un qualsiasi problema di dinamica si riduce ad un problema di statica. Adattato da Lagrange al principio dei lavori virtuali, il principio di d'Alembert si traduce nelle equazioni di Lagrange che reggono l'intera dinamica.

43 Le vibrazioni trasversali di una corda elastica, quali sono quelle degli strumenti a corde, soddisfano un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, detta appunto "equazione di d'Alembert", in cui lo spostamento di un punto della corda ad un certo istante è legato alla posizione iniziale, al tempo, alla tensione della corda e alla densità del materiale di cui questa consiste.

44 Con lo studio del moto della Terra sotto l'effetto della forza gravitazionale della Luna e del Sole, d'Alembert giunse a spiegare e a determinare la precessione degli equinozi e il fenomeno della nutazione.

45 Il calcolo delle probabilità ha origini antichissime; nel senso moderno si può considerare iniziato con gli scritti giovanili di Cardano attorno al 1520, che enunciò anche una forma piuttosto generale del teorema dei grandi numeri; tuttavia la sua opera *De ludo aleae* restò a lungo manoscritta e fu pubblicata soltanto nell'*Opera omnia*, oltre un secolo dopo la sua morte. Successivamente vi fu una corrispondenza tra Fermat e Pascal riguardante problemi di giochi dei dadi, e a quei problemi si interessò anche l'olandese Huygens, che riconobbe il calcolo delle probabilità come un nuovo ramo della matematica, con la necessità quindi di formulare una teoria. Pascal intrattenne corrispondenza su questi temi anche con Daniele Bernoulli. La probabilità fu uno dei principali interessi di Giacomo Bernoulli (1654-1705) e la sua opera *Ars conjectandi* (postuma, 1715) fu uno dei principali testi. D'alembert viene ricordato in questo campo soprattutto per le sue concezioni in contrasto con quelle generalmente accettate all'epoca.

46 Il brano è tratto dall'edizione Bibl. de la Pléiade - Gallimard, 1959, vol. II (1756-1763), cap. II.

47 Questo nome rimane nella tradizione locale e fuori della Germania per indicare lo stato tedesco attualmente denominato Braunschweig.

48 Il principio dei minimi quadrati è il principio, valido in statistica e calcolo delle probabilità, per cui il valore più probabile di una grandezza rilevata statisticamente è quello che rende minima la somma dei quadrati degli scostamenti delle singole osservazioni dalla loro media aritmetica.

49 Il diario in questione rimase nascosto tra le carte di famiglia fino al 1898, e fu pubblicato nel 1901 a cura del matematico Felix Klein, in un volume celebrativo dei 150 anni dalla fondazione della Società Scientifica di Gottinga.

era "pauca, sed matura". Nel 1798 ricevette il dottorato all'Università di Helmstädt. La sua dissertazione di laurea, pubblicata nel 1799, conteneva quello che oggi è noto come "teorema fondamentale dell'algebra" e recava il titolo: *Demonstratio nova theorematis omnem functionem rationalem integram in factores reales primi vel secondi gradus resolvi posse.*

Molti erano stati i tentativi di dimostrare questo teorema da parte di grandi matematici, tra i quali d'Alembert, ma Gauss dimostrò come tutte le dimostrazioni precedenti fossero inadeguate. Successivamente, nel 1816, ne pubblicò due nuove dimostrazioni, ed un'altra ancora nel 1850, cercando una dimostrazione con metodi puramente algebrici, mentre quella del 1799 era in parte basata su considerazioni geometriche. Nel 1801 pubblicò un trattato fondamentale sulla teoria dei numeri, *Disquisitiones arithmeticae*, contenente tra l'altro alcuni risultati sui numeri primi e l'identificazione di tutti i poligoni regolari costruibili con riga e compasso (lo sono, in particolare, tutti quelli con un numero n di lati, dove $n = 2^p + 1$ dove a sua volta è $p = 2^k$, con k = 0, 1, 2, …).

Agli inizi del secolo XIX Gauss fu attratto anche dall'astronomia, della quale iniziò ad occuparsi quasi per caso. Proprio nel primo giorno del XIX secolo era stato scoperto un nuovo pianeta, Cerere, ma poche settimane più tardi esso fu perduto di vista. Gauss era consapevole di possedere una insolita abilità di calcolo oltre al vantaggio di disporre del metodo dei minimi quadrati. Armato di questi strumenti si accinse a calcolare, sulla base delle poche osservazioni raccolte, l'orbita lungo la quale il pianeta si spostava. Per affrontare il problema di calcolare orbite sulla base di un numero limitato di osservazioni Gauss inventò uno schema che verrà poi chiamato *metodo di Gauss* e che viene usato ancora oggi per individuare le traiettorie dei satelliti. Il risultato fu un grande successo: il pianeta riapparve verso la fine dell'anno quasi esattamente nella posizione prevista dai calcoli di Gauss. Nel 1807 fu nominato direttore dell'Osservatorio di Gottinga e nel 1809 pubblicò *Theoria corporum coelestium*. Egli non abbandonò comunque le sue ricerche di matematica pura, e nel 1927 avviò una nuova branca della geometria, nota come "geometria differenziale", riguardante l'applicazione del calcolo infinitesimale allo studio delle curve piane e delle superfici che permette di trovare le proprietà di una curva o di una superficie nelle vicinanze di un punto della medesima. Su questo argomento pubblicò nel 1827 il trattato fondamentale *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Gauss scoprì tra l'altro quelli che anche lui chiamava "teoremi notevoli" concernenti famiglie di curve, come le geodetiche[50] tracciate su una superficie. Fu perseguendo studi come questi nel campo della geometria differenziale che i matematici del XIX secolo aprirono la strada alle teorie scientifiche del XX secolo.

Le ricerche sul numero e la distribuzione dei numeri primi, affrontate da Gauss nelle *Disquisitiones arithmeticae*, furono sviluppate principalmente da Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1805-1859), un matematico tedesco di origine francese, che nel 1855 doveva succedergli sulla cattedra di Gottinga. Egli mostrò come il dominio discreto della teoria dei numeri non poteva essere studiato separatamente dalla disciplina matematica che trattava di variabili continue: l'analisi infinitesimale. Si devono a Dirichlet la definizione moderna di funzione, alcuni risultati fondamentali sulle serie di Fourier e, nel campo della termodinamica e dell'elettrodinamica, lo studio del problema, oggi detto "problema di Dirichlet"[51], risolto mediante il suo principio di massimo che lo collega al calcolo delle variazioni.

Successore di Dirichlet sulla cattedra di matematica a Gottinga fu Bernhard Riemann (1826-1866), matematico di svariati interessi e di fertile immaginazione. Questa sua versatilità gli permise di dare importanti contributi non solo alla geometria e alla teoria dei numeri, ma anche al calcolo infinitesimale. Tra l'altro sulla funzione, nota come *zeta di Riemann* esiste una sua congettura che ha messo a dura prova i matematici per dimostrarne la verità o la falsità, senza che fino adesso si sia riusciti a trovare una soluzione definitiva[52]. A lui si deve la definizione di integrale usata nella maggior parte dei manuali di analisi per studenti universitari, anche se definizioni più generali di integrale sono state proposte nel XX secolo. Fondamentale è stata l'introduzione delle "superfici di Riemann": infatti fu il suo genio intuitivo nel campo della fisica e della matematica che produsse concetti come quello di curvatura di uno spazio, concetto senza il quale sarebbe stata impossibile la formulazione della teoria della relatività generale.

Altro importante matematico della scuola iniziata da Gauss fu Karl Weierstrass (1815-1897), professore all'università di Berlino dal 1856. Si devono a lui il programma di aritmetizzazione dell'analisi (che fino ad allora era basata su un'intuizione geometrica), una definizione soddisfacente del concetto di numero reale ed un perfezionamento della definizione di limite. Inizia con lui "l'età del rigore", durante la quale i vecchi dispositivi euristici ed intuitivi furono sostituiti da concetti logicamente precisi e criticamente vagliati. Fondamentali sono i suoi risultati nel campo delle funzioni analitiche, definite soltanto mediante serie di potenze, ed il concetto di *prolungamento analitico*.

---

[50] Sono le curve di minima distanza tra due punti di una superficie; su una superficie piana sono le rette, su una superficie sferica sono i cerchi massimi.

[51] Si tratta di trovare, dato un insieme A e una funzione *f* continua sul bordo di A, una funzione che coincida con *f* sul bordo di A, sia continua su tutto A, bordo compreso, e sia armonica all'interno di A.

[52] Si tratta di una funzione risultante come somma di una serie tramite alcune proprietà della quale si trova il numero dei numeri primi inferiore ad un numero dato.

Nonostante Weierstrass avesse dato una soddisfacente definizione di numero reale, usata da molti matematici del suo tempo, essa non era ancora universalmente accettata, ed era occasione di accesi dibattiti tra i matematici. Leopold Kronecker (1823-1891), professore a Berlino dal 1883, approvava il programma di aritmetizzazione dell'analisi proposto da Weierstrass, ma voleva che tutto si basasse su procedimenti aritmetici finiti; inoltre, rifacendosi alle antiche concezioni pitagoriche voleva che l'aritmetica e l'analisi venissero basate sui numeri interi. Celebre è la sua frase, pronunciata al Congresso del 1886 a Berlino: *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*. Effettivamente Weierstrass aveva fatto un primo tentativo di dare una definizione di numero irrazionale che fosse indipendente dal concetto di limite, dal momento che quest'ultimo fino allora aveva presupposto il primo e quindi c'era essenzialmente una "petitio principii". La completa aritmetizzazione dell'analisi diventò possibile soltanto quando i matematici si resero conto che i numeri reali (razionali ed irrazionali) andavano concepiti come strutture concettuali invece che come grandezze intuitive ereditate dalla geometria euclidea. Questo processo seguì l'altra grande rivoluzione della geometria che ebbe luogo allorché Gauss e segnatamente Lobačevskij[53] si liberarono dei preconcetti intuitivi concernenti lo spazio; fu allora possibile giungere alla conclusione che il postulato delle parallele di Euclide non si poteva dimostrare e che si potevano costruire geometrie coerenti che non soddisfacevano quel postulato, e quindi diverse da quella euclidea.

L'altro grande problema, evidenziato da Kronecker e che turbava i matematici (compreso Gauss) era una sorta di "horror infiniti", poiché si negava che in matematica potesse esservi qualcosa come un infinito "attuale" o "completo". Essi erano ancora convinti che l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo non indicassero altro che la potenzialità di Aristotele, ossia l'incompletezza del processo considerato. Il primo matematico che affrontò il problema dell'infinito attuale fu Bernhard Bolzano (1781-1848), un prete boemo, le cui ricerche matematiche furono indegnamente trascurate dai suoi contemporanei[54]. Egli, oltre ad occuparsi delle definizioni di limite, di derivata e di continuità di una funzione, evidenziò alcune importanti proprietà degli insiemi infiniti in un lavoro uscito postumo a Lipsia nel 1851 con il titolo *Paradoxien des Unendlichen*[55]. Prendendo spunto dal paradosso galileiano della corrispondenza biunivoca tra i numeri interi non negativi e i quadrati perfetti, Bolzano dimostrò che simili corrispondenze tra gli elementi di un insieme infinito e quelli di un suo sottoinsieme sono molto comuni. Il primo che vide nei paradossi di Bolzano non già un'anomalia, ma una proprietà universale degli insiemi infiniti, fu Richard Dedekind (1831-1916). Questi, nel saggio *Stätigkeit und irrationale Zahlen* (1872)[56], dette questa precisa definizione: *un sistema S si dice* infinito *quando è simile ad una propria parte; in caso contrario S si dice un insieme* finito. Successivamente nell'opera *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888)[57] Dedekind dette la definizione, usata ancora oggi, di numero reale e mostrò la corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i punti di una retta.

Negli ultimi decenni del secolo XIX furono fatti parecchi sforzi per dare rigore ai concetti fondamentali dell'aritmetica e non lasciare all'intuizione neanche i concetti più semplici, come ad esempio quello di numero intero non negativo. In questo ordine di idee il logico e matematico tedesco F. L. G. Frege (1848-1925) giunse alla definizione di numero cardinale e, sviluppando ulteriormente le proprie concezioni nell'opera in due volumi (il primo del 1893, il secondo del 1903) *Grundgesetze der Arithmetik*, affrontò l'impresa di derivare i concetti dell'aritmetica da quelli della logica formale: egli infatti pensava che la matematica e la logica non fossero due cose distinte. Tuttavia la sua opera non fu accolta con molto entusiasmo e soltanto allorché fu ripresa indipendentemente da Bertrand Russel la logica matematica

---

[53] Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1857), russo, docente e per venti anni rettore all'università di Kazan, fu uno dei fondatori di una delle geometrie non euclidee, quella iperbolica.

[54] Bolzano fu professore di filosofia della religione all'università di Praga, ma nel 1819 fu sospeso dall'insegnamento, avendo egli esposto certe tesi non tradizionaliste sull'assurdità della guerra, sull'ingiustizia delle differenze sociali e sulla posizione libera del cittadino nei confronti dello stato. Ne sorse un contrasto tra le autorità imperiali che pretendevano una condanna di Bolzano anche da parte della chiesa e le autorità ecclesiastiche, che invece prosciolsero Bolzano da ogni addebito.

[55] Esiste una traduzione italiana, *I paradossi dell'infinito*, ed. Feltrinelli, 1965, con un saggio di F. Voltaggio.

[56] Quest'opera fu pubblicata nel 1872, ma, come afferma lo stesso Dedekind all'inizio, essa fu concepita già nel 1858 quando l'autore assunse un insegnamento al Politecnico di Zurigo. La prima edizione italiana è apparsa nel 1926, insieme ad un'altra opera, con traduzione e grosso corpus di note storico-critiche di Oscar Zariski (ed. Alberto Stock). Nella critica al concetto di sistema infinito come definito da Dedekind, Zariski fa notare che l'aver definito l'insieme finito come "non infinito" non garantisce però che gli insiemi finiti siano quelli a cui siamo abituati, cioè quelli in corrispondenza biunivoca con (nella terminologia di Dedekind: *simili a*) un insieme finito di numeri naturali.

[57] Quest'opera, concepita già a partire dai primi anni Settanta dell'Ottocento, vide tre edizioni, nel 1888, nel 1893 e nel 1911. Nelle edizioni successive alla prima Dedekind antepone delle prefazioni nelle quali riconosce che alcuni appunti fattigli da altri matematici hanno la loro fondatezza; tuttavia, ritenendo che la confutazione delle obiezioni sia di troppo impegno fa ristampare l'opera senza apportarvi variazioni. In italiano è comparsa una traduzione di O. Zariski nel 1926, in un unico volume insieme a *Continuità e numeri irrazionali* nell'edizione citata alla nota precedente. Nel 1982 è apparsa un'altra edizione italiana comprendente entrambe le opere (*Scritti sui fondamenti della matematica*, ed. Bibliopolis), con traduzione e note di Francesco Gana; non vi è più l'apparato critico di Zariski, ma vi sono estratti della corrispondenza di Dedekind con altri matematici. Presumibilmente il Richard non conosceva questa seconda edizione.

diventò uno degli interessi principali dei matematici di tutto il mondo. Una delle acquisizioni definitive del XIX secolo fu il riconoscimento che la matematica non è una scienza naturale, ma una creazione dell'intelletto umano. Bertrand Russel (1872-1970) scriveva sull'*International Monthly* del 1901: "*Il XIX secolo, che si vanta di aver inventato la macchina a vapore e la teoria dell'evoluzione, potrebbe a maggior ragione andare fiero della scoperta della matematica pura*." In altre parole tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX si riconosceva generalmente, anche da parte dei non matematici, che la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui a partire da premesse arbitrarie si traggono conclusioni valide. Che i postulati siano o no veri, in senso scientifico, non ha alcuna importanza, e gli assiomi sono espressi in termini indefiniti.

Nel 1910 veniva pubblicato il primo volume dei *Principia mathematica* (3 voll., 1910-1913) di Russel e Alfred North Whitehead (1861-1947), il più elaborato tentativo mai fatto prima di allora, di sviluppare le nozioni fondamentali dell'aritmetica a partire da un insieme ben definito di assiomi, con un programma volto a dimostrare che tutta la matematica pura poteva essere dedotta da un numero ristretto di principi logici fondamentali. I due autori giunsero alla conclusione che matematica e logica sono fondamentalmente identiche, e che la matematica non è altro che un ramo della logica sviluppato con particolare riferimento alle applicazioni quantitative. L'opera di Russel e Whitehead era basata anche sugli assiomi del matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932)[58], che nel suo *Formulario mathematico* (1894-1908)[59] si propose di sviluppare un linguaggio formalizzato, che potesse contenere non solo la logica matematica, ma tutti i risultati dei più importanti settori della matematica. Il suo programma attirò un folto gruppo di collaboratori e di discepoli per il suo rifiuto di usare qualsiasi linguaggio metaforico e la sua scelta felice di un simbolismo che è in gran parte usato ancora oggi[60].

"Con i risultati della scienza moderna (geometria non euclidea, logica matematica, relatività, quanti, evoluzionismo biologico, ecc.) si è delineata una nuova gnoseologia, secondo cui il fondamento del sapere umano appare affatto empirico e la sua struttura razionale chiaramente delimitata dalla matematica e dalla logica odierne, concepite come discipline analitiche."[61] Nasce così la filosofia della scienza che, non accettando il "sintetico a priori" cerca di pervenire a conclusioni precise e credibili, come i risultati della scienza contemporanea, mediante l'analisi logica. Fra gli illustri esponenti di questa disciplina, oltre a Carnap, Reichenbach, Monod, possiamo annoverare in Italia Federigo Enriques (1871-1946)[62], Guido Castelnuovo (1865-1952)[63] e soprattutto colui che, come già detto, ha affermato questa disciplina in Italia, Ludovico Geymonat. Di quest'ultimo diamo una bibliografia più estesa:

Il problema della conoscenza nel positivismo (Bocca, 1931)
Ricerche filosofiche (dalla *Rivista di filosofia*, 1938-39)
Studi per un nuovo razionalismo (Chiantore, 1945)
Galileo Galilei (Einaudi, 1962)
Storia del pensiero filosofico e scientifico (enciclopedia in sette voll., Garzanti, 1970-76)
Scienza e realismo (Feltrinelli, 1977)
Filosofia e filosofia della scienza (Feltrinelli, 3ª ed., 1980)

---

[58] Peano è uno dei maggiori esponenti della scuola matematica italiana dopo l'Unità. Dopo l'organizzazione da parte di Francesco Brioschi (1824-1897) dell'Istituto Tecnico (leggasi: Politecnico) di Milano, i due matematici Luigi Cremona ed Enrico Betti visitarono nel 1858 i matematici francesi e tedeschi. Scriverà Vito Volterra sul *Bull. Am. Math. Soc.* nel 1900 che "l'esistenza di un'Italia scientifica data da questo viaggio". Altro risultato di rilievo della scuola italiana è quello ottenuto da Eugenio Beltrami (1835-1900), un allievo di Brioschi che costruì modelli di piano non euclideo dando una dimostrazione non proiettiva (quale era invece quella del tedesco F. Klein) della non contraddittorietà delle geometrie non euclidee.

[59] Il Peano fu un fautore di una lingua internazionale per i bisogni della scienza, principalmente occidentale, e costruì una lingua con questo scopo, il *latino sine flexione*, facilmente comprensibile per chi conosceva bene il latino. Tale lingua, che nel 1909 prende il nome di *Interlingua*, fu usata dal Peano e anche da altri matematici fino agli anni Trenta del '900. In *latino sine flexione* è appunto scritto il *Formulario mathematico*.

[60] A Peano, sia come logico e matematico che come ideatore di un progetto di lingua internazionale a fini scientifici, sono dedicati moltissimi studi, tra cui assai pregevole è il *Carteggio* (1896-1914) tra Peano e Couturat, a cura di C. S. Roero ed E. Luciano, Olschky, 2005.

[61] La citazione è dall'Introduzione di A. Pasquinelli all'opera di Hans Reichenbach *La nascita della filosofia scientifica*, Il Mulino, 1961. Un'altra pregevole opera di Reichenbach è *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, Boringhieri, 1954.

[62] Un gruppo di valenti studiosi che si raccoglievano attorno ad Enriques aveva fondato nel 1907 la rivista *Scientia*, sulla quale pubblicavano illustri logici e filosofi e storici della scienza, come Russell e Reichenbach. Tra le opere notevoli di Enriques su questo tema citiamo *Le matematiche nella storia e nella cultura* (Zanichelli, 1938) e, insieme a G. de Santillana, *Storia del pensiero scientifico. Il mondo antico* (Zanichelli, 1932) e *Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità ai tempi moderni* (Zanichelli, 1937)

[63] Guido Castelnuovo fu un importante cultore di geometria algebrica, e autore di un conciso, ma assai pregevole, libretto *Le origini del calcolo infinitesimale nell'èra moderna* (Zanichelli, 1938).

Lineamenti di filosofia della scienza (Mondadori, 1985)

Da quest'ultimo libro, dal paragrafo "*Verità matematica*" del cap. X intitolato "*Scienza e verità*" voglio citare questo brano che sintetizza mirabilmente il suo pensiero:

> *… l'affermazione "una certa proposizione P è vera in una teoria" significa semplicemente "P è logicamente deducibile dagli assiomi di tale teoria" donde segue che la "verità" di una proposizione matematica è una funzione vuoi degli assiomi di tale teoria vuoi delle regole logiche in base alle quali intendiamo dedurre una proposizione dall'altra entro l'anzidetta teoria.*

Per concludere questa conferenza torno ai due temi che ne sono stati il filo conduttore: il problema delle due culture e l'insegnamento della matematica. Sul problema delle due culture nulla mi sembra più adatto che citare il brano conclusivo di Geymonat nel libro citato *Lineamenti di filosofia della scienza*:

> *Qualche anno addietro si accese anche in Italia una vivacissima discussione sul problema delle due culture, affrontato da C. P. Snow in un volumetto che portava appunto tale titolo. Sostanzialmente il dibattito verteva sul significato da attribuirsi alla filosofia perché questa appunto costituiva l'asse della cultura umanistica, mentre - a parere dei sostenitori della totale separazione fra cultura umanistica e cultura scientifica - essa non rientrerebbe in alcun modo nell'ambito della cultura scientifica (sia per la diversità degli oggetti trattati, sia per la diversità del metodo seguito nella loro trattazione).*
>
> *Ebbene a questo punto è chiaro che la concezione gentiliana della filosofia e della scienza costituisce il supporto naturale di un tal modo ("separatista") di vedere. Ma il pensiero moderno sembra ormai avviato per un'altra strada. L'esclusione della scienza dalla cultura sembra ormai costituire un sacrificio troppo pesante per la cultura.*
>
> *Se non accettiamo di compiere un sacrificio così grande, dovremo dunque far nostra un'altra concezione della filosofia. Non si tratterà di stabilire un'alleanza più o meno duratura fra filosofia e scienza, ma di cercare la filosofia nelle stesse pieghe della scienza.*
>
> *Oggi sappiamo che questa ricerca rientra per l'appunto fra i compiti centrali della filosofia della scienza, compito che richiede la stretta collaborazione di filosofi, scienziati, logici, storici della scienza. Ovviamente non si tratta di un compito facile, ma di un compito che va comunque affrontato se vogliamo ricuperare una cultura unitaria; e tutto ci suggerisce che va affrontato sulla base di uno studio aggiornato e approfondito dei singoli problemi sopra elencati di filosofia della scienza.*

Tornando al problema dell'insegnamento, l'evoluzione del pensiero matematico dall'epoca antica a quella più vicina a noi assume un interesse notevole, se la si considera legata al tempo e ai personaggi, alla storia. La matematica viene oggi troppo spesso presentata come un complesso di formule impersonale, assolutamente fisso, senza la possibilità di cambiamento né di revisioni. Ciò non consente una conoscenza profonda della materia stessa; non mi stancherò mai di ripeterlo: nessun problema dovrebbe essere affrontato senza legarlo alle cause che lo hanno generato, alle persone che lo hanno risolto, alla sua evoluzione successiva (critiche, ripensamenti, generalizzazioni).

Credo inoltre che si debba fare un uso "pavloviano" delle notizie storiche e degli aneddoti. Affinché ad un eccitamento cerebrale (la lezione) segua l'apprendimento, lo stimolo non deve durare troppo a lungo e deve essere intervallato da pause - notizie storiche o aneddoti. Infatti la ricezione di molti stimoli è un processo nervoso importante, una fatica che per parecchi sistemi nervosi è eccessiva e finisce per condurre ad un vero fallimento. Voglio a questo proposito concludere citando dall'articolo *Breve saggio sull'attività nervosa superiore* di Ivan Petrovič Pavlov (1849-1936), pubblicato nella miscellanea americana *Psychologies of 1930* il seguente brano[64]:

> *qualunque sistema organico […] ha bisogno di riposarsi […]. Abbiamo veduto sopra come un eccitamento di una stessa cellula prolungato solo per pochi minuti conduca allo sviluppo in essa di un processo inibitorio, il quale limita e finisce per sospendere del tutto l'attività della cellula stessa.*

E sperando di non aver troppo abusato delle vostre cellule vi ringrazio dell'attenzione.

---

[64] Il brano è originariamente in inglese; si trova tradotto, insieme a vari articoli di Pavlov, in *I riflessi condizionati*, Boringhieri, 1961, pp. 208-209.