ERRATA CORRIGE e AGGIUNTE: Traccia delle lezioni del corso di Analisi Matematica 2, A.A. 2016/17, aggiornata il 15 luglio 2017

p. 47, ultime 4 righe: sostituire le ultime 4 righe con

Siano ora $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Se $x_0 \in E$ è un punto di accumulazione per E, e se f è una funzione di $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}^m$, allora valgono le seguenti affermazioni, la cui verifica si lascia per esercizio.

(i) Se $m = 1$ ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in E \setminus \{x_0\}\,,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per x_0 in E è data da $\{\mathbb{B}_n(x_0, \delta[\cap E\}_{\delta\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $+\infty$ è data da $\{]M, +\infty]\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(ii) Se $m = 1$ ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in E \setminus \{x_0\}\,,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per x_0 in E è data da $\{\mathbb{B}_n(x_0, \delta[\cap E\}_{\delta\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $-\infty$ è data da $\{[-\infty, -M[\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(iii) Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in E \setminus \{x_0\}\,,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M\,.$$
Ricordiamo anche che ciò equivale ad affermare che $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$. Basterà infatti ricordare che una base di intorni per x_0 in E è data da $\{\mathbb{B}_n(x_0, \delta[\cap E\}_{\delta\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per ∞ è data da $\{\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_m(0, M]\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(iv) Se $l \in \mathbb{R}^m$ si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in E \setminus \{x_0\}\,,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |l - f(x)| < \epsilon\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per x_0 in E è data da $\{\mathbb{B}_n(x_0, \delta[\cap E\}_{\delta\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per l è data da $\{\mathbb{B}_m(l, \epsilon[\}_{\epsilon\in]0,+\infty[}$.

Se E non è limitato, caso in cui ∞ è di accumulazione per E, e se f è una funzione di E in $\mathbb{R}^m$, allora valgono le seguenti affermazioni,

(i) Se $m = 1$ ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ |x| > R \Rightarrow f(x) > M\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per ∞ in $E \cup \{\infty\}$ è data da $\{(\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n(0,R]) \cap (E \cup \{\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $+\infty$ è data da $\{]M,+\infty]\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(ii) Se $m = 1$ ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ |x| > R \Rightarrow f(x) < -M\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per ∞ in $E \cup \{\infty\}$ è data da $\{(\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n(0,R]) \cap (E \cup \{\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $-\infty$ è data da $\{[-\infty,-M[\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(iii) Si ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ |x| > R \Rightarrow |f(x)| > M\,.$$
Ricordiamo anche che ciò equivale ad affermare che $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$. Basterà infatti ricordare che una base di intorni per ∞ in $E \cup \{\infty\}$ è data da $\{(\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n(0,R]) \cap (E \cup \{\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per ∞ è data da $\{\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_m(0,M]\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(iv) Se $l \in \mathbb{R}^m$ si ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ |x| > R \Rightarrow |l - f(x)| < \epsilon\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per ∞ in $E \cup \{\infty\}$ è data da $\{(\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n(0,R]) \cap (E \cup \{\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per l è data da $\{\mathbb{B}_m(l,\epsilon[\}_{\epsilon\in]0,+\infty[}$.

Se $n = 1$ e se E non è limitato superiormente limitato, caso in cui $+\infty$ è di accumulazione per E, e se f è una funzione di E in $\mathbb{R}^m$, allora valgono le seguenti affermazioni,

(i) Se $m = 1$ ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$x \in E\,,\ x > R \Rightarrow f(x) > M\,.$$

Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $+\infty$ in $E \cup \{+\infty\}$ è data da $\{]R, +\infty] \cap (E \cup \{+\infty\})\}_{R \in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $+\infty$ è data da $\{]M, +\infty]\}_{M \in]0,+\infty[}$.

(ii) Se $m = 1$ ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$x \in E\,,\ x > R \Rightarrow f(x) < -M\,.$$

Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $+\infty$ in $E \cup \{+\infty\}$ è data da $\{]R, +\infty] \cap (E \cup \{+\infty\})\}_{R \in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $-\infty$ è data da $\{[-\infty, -M[\}_{M \in]0,+\infty[}$.

(iii) Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$x \in E\,,\ x > R \Rightarrow |f(x)| > M\,.$$

Ricordiamo anche che ciò equivale ad affermare che $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$. Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $+\infty$ in $E \cup \{+\infty\}$ è data da $\{]R, +\infty] \cap (E \cup \{+\infty\})\}_{R \in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per ∞ è data da $\{\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_m(0, M]\}_{M \in]0,+\infty[}$.

(iv) Se $l \in \mathbb{R}^m$ si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$x \in E\,,\ x > R \Rightarrow |l - f(x)| < \epsilon\,.$$

Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $+\infty$ in $E \cup \{+\infty\}$ è data da $\{]R, +\infty] \cap (E \cup \{+\infty\})\}_{R \in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per l è data da $\{\mathbb{B}_m(l, \epsilon[\}_{\epsilon \in]0,+\infty[}$.

Se $n = 1$ e se E non è limitato inferiormente limitato, caso in cui $-\infty$ è di accumulazione per E, e se f è una funzione di E in $\mathbb{R}^m$, allora valgono le seguenti affermazioni.

(i) Se $m = 1$ ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$x \in E\,,\ x < -R \Rightarrow f(x) > M\,.$$

Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $-\infty$ in $E \cup \{-\infty\}$ è data da $\{[-\infty, -R[\cap (E \cup \{-\infty\})\}_{R \in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $+\infty$ è data da $\{]M, +\infty]\}_{M \in]0,+\infty[}$.

(ii) Se $m = 1$ ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ x < -R \Rightarrow f(x) < -M\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $-\infty$ in $E \cup \{-\infty\}$ è data da $\{[-\infty, -R[\cap(E \cup \{-\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per $-\infty$ è data da $\{[-\infty, -M[\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(iii) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ x < -R \Rightarrow |f(x)| > M\,.$$
Ricordiamo anche che ciò equivale ad affermare che $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$. Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $-\infty$ in $E \cup \{-\infty\}$ è data da $\{[-\infty, -R[\cap(E \cup \{-\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per ∞ è data da $\{\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_m(0, M]\}_{M\in]0,+\infty[}$.

(iv) Se $l \in \mathbb{R}^m$ si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$x \in E\,,\ x < -R \Rightarrow |l - f(x)| < \epsilon\,.$$
Basterà infatti ricordare che una base di intorni per $-\infty$ in $E \cup \{-\infty\}$ è data da $\{[-\infty, -R[\cap(E \cup \{-\infty\})\}_{R\in]0,+\infty[}$ e che una base di intorni per l è data da $\{\mathbb{B}_m(l, \epsilon[\}_{\epsilon\in]0,+\infty[}$.

Noi però ricorreremo raramente alla definizione di limite o ad una delle sue formulazioni equivalenti al fine di calcolare un limite. Per calcolarlo ricorreremo più spesso ai teoremi che abbiamo a disposizione ed a opportune disuguaglianze.

0.1 Qualche osservazione sul calcolo dei limiti per funzioni di più variabili

Cominciamo con una considerazione sul limite di una funzione radiale, la cui definizione introduciamo ora.

Definizione 0.1.1 *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Diremo che una funzione G di Ω in un insieme Y è radiale se esiste una funzione g di un intervallo I della retta reale a valori in Y tale che*
$$|x| \in I \qquad \forall x \in \Omega\,, \qquad G(x) = g(|x|) \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Quindi ad esempio, la funzione $\sin(|x|)$ è radiale in $\mathbb{R}^n$ e possiamo prendere come g la funzione seno. Illustriamo allora il seguente esempio di limite per funzioni radiali.

Esempio. Sia g una funzione di $]0,+\infty[$ in $\mathbb{R}$ e sia G la funzione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$G(x) = g(|x|) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,.$$

Allora

(i) Se esiste $\lim_{r\to 0} g(r)$, finito o no, allora esiste anche $\lim_{x\to 0} G(x)$ e

$$\lim_{r\to 0} g(r) = \lim_{x\to 0} G(x)\,.$$

(ii) Se esiste $\lim_{r\to +\infty} g(r)$, finito o no, allora esiste anche $\lim_{x\to \infty} G(x)$ e

$$\lim_{r\to +\infty} g(r) = \lim_{x\to \infty} G(x)\,.$$

Proveremo ambo le uguaglianze invocando il teorema del limite della composta, anche detto teorema di cambiamento di variabile nel limite, in questo caso con la 'sostituzione' $r = |x|$, e vogliamo farlo verificandone tutte le ipotesi e riferendoci alla notazione di [**?**, Teor. 5.3.2 (ii)].

Per (i) consideriamo lo spazio topologico $X = \mathbb{R}^n$, il suo punto di accumulazione $x_0 = 0$ e la mappa f di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nello spazio topologico $Y = [0,+\infty[$ definita da

$$f(x) \equiv |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

che sappiamo avere limite $l \equiv 0$ per x tendente a 0. Consideriamo poi la mappa g di cui nell'enuciato di $]0,+\infty[= [0,+\infty[\setminus\{0\}$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ che sappiamo avere limite diciamo L per r tendente a $l \equiv 0$. Per applicare il teorema della composta occorre verificare che esiste un intorno U di $x_0 = 0$ tale che $f(x) \neq l \equiv 0 = \lim_{x\to 0} |x|$ per ogni $x \in U\setminus\{0\}$, e come U possiamo prendere tutto $\mathbb{R}^n$ in quanto $f(x) = |x|$ non può assumere il valore 0 per alcun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Per il teorema del limite della composta avremo dunque $\lim_{r\to 0} g(r) = \lim_{x\to 0} g\circ f(x) = \lim_{x\to 0} G(x)$ come voluto. Il caso in cui g abbia limite ∞ si tratta in modo analogo considerando g a valori in $\alpha\mathbb{R}$ anzichè in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Per (ii) consideriamo lo spazio topologico $X = \alpha\mathbb{R}^n$, il suo punto di accumulazione $x_0 = \infty$ e la mappa f di $\alpha\mathbb{R}^n \setminus \{\infty\} = \mathbb{R}^n$ nello spazio topologico $Y = [0,+\infty]$ definita da

$$f(x) \equiv |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

che sappiamo avere limite $l \equiv +\infty$ per x tendente a ∞. Consideriamo poi la mappa g di cui nell'enuciato di $]0,+\infty[=]0,+\infty] \setminus \{+\infty\}$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ che sappiamo avere limite diciamo L per r tendente a $l \equiv +\infty$. Per applicare il teorema della composta occorre verificare che esiste un intorno U di $x_0 = \infty$ tale che $f(x) \neq l \equiv +\infty = \lim_{x\to\infty} |x|$ per ogni $x \in U \setminus \{\infty\}$, e come U possiamo prendere tutto $\alpha\mathbb{R}^n$ in quanto $f(x) = |x|$ non può assumere il valore ∞ per alcun $x \in \alpha\mathbb{R}^n \setminus \{\infty\} = \mathbb{R}^n$. Per il teorema del limite della composta avremo dunque $\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{x\to\infty} g \circ f(x) = \lim_{x\to\infty} G(x)$ come voluto. Il caso in cui g abbia limite ∞ si tratta in modo analogo considerando g a valori in $\alpha\mathbb{R}$ anzichè in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Studiando i limiti per funzioni di una sola variabile, abbiamo visto che i polinomi non costanti hanno limite ∞ a ∞. In generale non così per i polinomi in più variabili, come mostra il seguente esempio.

Esempio. Sia $p(x_1,\ldots,x_n)$ un polinomio non costante in $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ variabili reali tale che il suo insieme degli zeri

$$Z(p) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 0\}\,,$$

non sia limitato. Se allora $L \equiv \lim_{x\to\infty} p(x)$ dovesse esistere, esso dovrebbe necessariamente coincidere con il limite della sua restrizione a $Z(p)$ e cioè con $\lim_{x\to\infty} p_{|Z(p)}(x)$ che vale zero in quanto p è identicamente nullo su $Z(p)$. Mostriamo che però ciò non può essere vero. Essendo infatti p non costante, in almeno un monomio non nullo di cui p è somma dovrà comparire con esponente non nullo almeno una delle sue variabili, che supponiamo ad esempio essere x_1. Sia $d_1 \geq 1$ il massimo grado in cui x_1 compare nei monomi del polinomio, Esisteranno allora $d+1$ polinomi $q_0(x_2,\ldots,x_n)$,..., $q_{d_1}(x_2,\ldots,x_n)$ nelle $n-1$ variabili x_2,..., x_n e con $q_{d_1}(x_2,\ldots,x_n)$ non identicamente nullo tali che

$$p(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=0}^{d_1} q_j(x_2,\ldots,x_n)x_1^j \qquad \forall(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Non essendo $q_{d_1}(x_2,\ldots,x_n)$ identicamente nullo esisterà $(\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $q_{d_1}(\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n) \neq 0$. Essendo $p(x_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)$ un polinomio non costante di grado d_1 nella variabile x_1 sappiamo che

$$\lim_{x_1\to\infty} p(x_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n) = \infty\,.$$

Se quindi $L \equiv \lim_{x\to\infty} p(x)$ dovesse esistere, il teorema del limite della composta permetterebbe di concludere che

$$L = \lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x_1\to\infty} p(x_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = \infty\,,$$

il che è assurdo in quanto abbiamo appena provato che se L esistesse esso dovrebbe coincidere con 0.

p. 49, 7 righe dal basso: aggiunere l'argomento θ al $\cos^2$.

p. 55, ultime due righe: sostituire (due volte) $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

p. 61, riga 9: sostituire $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

p. 63, riga 2: sostituire $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^3$.

p. 65, riga 3: sostituire $\mathbb{R}\setminus$ con $\mathbb{R}\cup$

p. 75, riga 3: sostituire
f
con
$f(x,y)$

p. 80, riga 3 della proposizione 4.2.5: sostituire
$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$
con
$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$

p. 84, riga 6 della dimostrazione: sostituire
$(0,0)$
con
(x_0, y_0)

p. 84, riga 6 della dimostrazione: mettere il simbolo $\|$ all'inizio del numeratore ed il simbolo $\|_Z$ alla fine del numeratore.

p. 88, riga 4: sostituire
$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, Y)$

con

Y

p. 89, 3 righe sopra l'inizio del paragrafo 4.7: sostituire

p

con

x

p. 90, riga 4 del secondo esercizio: sostituire

Dire se f

con

Stabilire i valori di α per cui f_α

p. 101, prima dell'esempio: aggiungere

Si osserva poi che

$$\begin{aligned} d^2 f(p)[v_1, v_2] &= \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}(p) v_{1j} v_{2l} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}_{|x=p} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_{1j} \right\} v_{2l} \\ &= d \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} v_{1j} \right\} (p)[v_2] = D_{v_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} v_{1j} \right\} (p) = D_{v_2} \left\{ D_{v_1} f \right\} (p) , \end{aligned}$$

per ogni $v_1 \equiv (v_{11}, \dots, v_{1n})$, $v_2 \equiv (v_{21}, \dots, v_{2n}) \in \mathbb{K}^n$ e si prova che $d^2 f(p)$ è simmetrico. Sempre prendendo questa definizione di differenziale secondo, si definisce $C^2(D, Y)$ come l'insieme delle funzioni di classe $C^1(D, Y)$ le cui derivate parziali di ordine 1 sono differenziabili con continuità in D. Per il teorema del differenziale totale $C^2(D, Y)$ coincide allora con l'insieme delle funzioni di D in Y che hanno derivate parziali continue in D fino all'ordine 2.

p. 106, riga 5: sostituire

A_p

con

D

p. 106, riga 7 della dimostrazione: sostituire

A_p

con

D

p. 110, subito prima del paragrafo 4.14: aggiungere:
Ragionando induttivamente su k si prova poi che

$$d^k f(p)[v_1, \ldots, v_k] = D_{v_k} \ldots D_{v_1} f(p)$$

per ogni $v_1 \equiv (v_{11}, \ldots, v_{1n})$,..., $v_k \equiv (v_{k1}, \ldots, v_{kn})$ in $\mathbb{K}^n$ e si prova che $d^k f(p)$ è simmetrico. Sempre prendendo questa definizione di differenziale k-esimo, si definisce induttivamente $C^k(D, Y)$ come l'insieme delle funzioni di classe $C^{k-1}(D, Y)$ le cui derivate parziali di ordine $k - 1$ sono differenziabili con continuità in D. Per il teorema del differenziale totale $C^k(D, Y)$ coincide allora con l'insieme delle funzioni di D in Y che hanno derivate parziali continue in D fino all'ordine k.

p. 114, 4 righe dal basso: sostituire
fattori
con
fattori di

p. 117, fine della riga 5 dell'enunciato del teorema 4.15.2: sostituire
$[x - p]^m$
con
$[x - p]^{m+1}$

p. 117: aggiungere la seguente dimostrazione del teorema 4.15.2 della Formula di Taylor con resto di Lagrange:

Dimostrazione. L'idea consiste nell'applicare la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange alla funzione ψ di una variabile reale definita da

$$\psi(t) \equiv f(p + t(x - p)) \qquad \forall t \in [0, 1] \,.$$

Cominciamo con l'osservare che la mappa φ di $\mathbb{R}$ che a t associa $p + t(x - p)$ è continua e che dunque l'insieme

$$A_p \equiv \{t \in \mathbb{R} : \, \varphi(t) = p + t(x - p) \in D\} = \varphi^{\leftarrow}(D) \,,$$

è aperto. Inoltre per ipotesi il segmento $[p, x] = \{p + t(x - p) \, : \, t \in [0, 1]\}$ è contenuto in D e dunque $[0, 1] \subseteq A_p$. Essendo $f \in C^m(D)$ e φ di classe C^∞, la composta $\psi = f \circ \varphi$ è di classe C^m. Inoltre essendo f differenziabile $(m + 1)$ volte in $D \setminus \{p\}$ e φ di classe C^∞, la composta $\psi = f \circ \varphi$ è $(m + 1)$ volte in

$A_p \setminus \{0\}$ e quindi in $]0,1[$. Per la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange in $[0,1]$ esiste allora $\eta \in]0,1[$ tale che

$$\psi(1) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\psi^{(j)}(0)(1-0)^j + \frac{1}{(m+1)!}\psi^{(j)}(\eta)(1-0)^{m+1}\,.$$

Per definizione abbiamo $\psi(1) = f(x)$, $\psi(0) = f(p)$, e abbiamo già osservato che la differenziabilità $m+1$ volte di f sui punti del segmento $[p,x]$ implica che

$$\begin{aligned} \psi^{(j)}(0) &= D^j_{x-p} f(p) = d^j f(p)[x-p]^j \qquad \forall j \in \{1,\ldots,m\}\,, \\ \psi^{(m+1)}(\eta) &= D^{m+1}_{x-p} f(p+\eta(x-p)) \\ &= d^{m+1} f(p+\eta(x-p))[x-p]^{m+1}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo allora tali uguaglianze nella formula di Lagrange per ψ di cui sopra e posto $\xi \equiv p + \eta(x-p)$ otteniamo la formula della tesi. □

p. 117, 10 righe sopra il Lemma 4.15.3: cancellare il paragrafo

Anche in questo caso posto .... di una variabile reale e quindi dedurre l'enunciato di cui sopra.

p. 122, termine del punto (i) della osservazione: aggiungere

Detto infatti W un intorno di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in W$, (risp. $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in W$) esiste per la continuità di φ in y_0 un intorno V di y_0 tale che $\varphi(V) \subseteq W$ e allora si avrà $f(\varphi(y)) \leq f(x_0) = f(\varphi(y_0))$ per ogni $y \in V$ (risp. $f(\varphi(y)) \geq f(x_0) = f(\varphi(y_0))$ per ogni $y \in V$).

p. 122, termine del punto (ii) della osservazione: aggiungere

Detto infatti W un intorno di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in W \setminus \{x_0\}$, (risp. $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in W \setminus \{x_0\}$) esiste per la continuità di φ in y_0 un intorno V di y_0 tale che $\varphi(V) \subseteq W$ e per l'iniettività di φ si avrà $\varphi(V \setminus \{y_0\}) \subseteq W \setminus \{x_0\}$. Si avrà allora $f(\varphi(y)) < f(x_0) = f(\varphi(y_0))$ per ogni $y \in V \setminus \{y_0\}$ (risp. $f(\varphi(y)) > f(x_0) = f(\varphi(y_0))$ per ogni $y \in V \setminus \{y_0\}$).

p. 125, subito prima della proposizione 5.1.6: aggiungere

Noi poi diremo anche che un operatore bilineare $B \in \mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è definito o semidefinito positivo o negativo, se tale è la forma quadratica ad esso associata.

p. 126, dopo la riga 4 della dimostrazione del 5.1.7: aggiungere:
per la disuguaglianza di Schwarz,

p. 126, una riga sopra il teorema 5.1.8: aggiungere:
Osservazione. Siano $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, D un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $p \in D$. Se f è una funzione due volte differenziabile in p, sappiamo che $d^2 f(p)$ è un operatore bilineare di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ cui resta associata la matrice Hessiana $H_f(p)$. La forma quadratica associata a $d^2 f(p)$ coincide dunque con la forma quadratica $q_{H_f(p)}$ di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$q_{H_f(p)}[x] = x^t H_f(p) x = d^2 f(p)[x, x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \,.$$

p. 127, prime 6 righe: sostituire
Sia $\delta > 0$ tale che $B(p, \delta] \subseteq D$. Dato $x \in B(p, \delta]$, la formula di Taylor assicura l'esistenza di $\xi \in]p, x[$ tale che .... allora $f(x) - f(p) > 0$ per ogni $x \in B(p, \delta] \setminus \{0\}$, e quindi p è un punto di minimo relativo stretto per f.
con
(i) Supponiamo che la forma quadratica associata a $d^2 f(p)$ sia definita positiva.

Essendo f di classe C^2 la mappa di D in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ che a x associa $d^2 f(x)$ è continua. Ora però sappiamo dall'algebra lineare che la mappa di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in $M_n(\mathbb{R})$ che a un operatore bilineare associa la sua matrice è un isomorfismo, e sappiamo che le mappe lineari che agiscono fra spazi normati di dimensione finita sono continui. Ma allora la composta di queste due mappe ossia la mappa H_f che associa a $x \in D$ la matrice $H_f(x)$ associata a $d^2 f(x)$ è continua.

Notiamo che alla medesima conclusione si poteva giungere osservando che

$$H_f(x) = \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(x) e_{jl} \qquad \forall x \in D \,,$$

ove per ciascun $j, l \in \{1, \ldots, n\}$ il simbolo e_{jl} denota la matrice con tutti gli elementi nulli salvo quello di posto (j, l) che vale 1 e ricordando che le derivate parziali seconde di f sono continue per ipotesi.

Ma allora l'insieme

$$D_+ \equiv \{x \in D : \; H_f(x) > 0\} = \{x \in D : \; H_f(x) \in \mathcal{A}\} = H_f^{\leftarrow}(\mathcal{A}) \,,$$

è aperto nel sottoinsieme aperto D di $\mathbb{R}^n$ ed esiste quindi $\delta > 0$ tale che $\mathbb{B}_n(p,\delta] \subseteq D_+$. Dato $x \in \mathbb{B}_n(p,\delta[\setminus\{p\}$, la formula di Taylor col resto di Lagrange assicura l'esistenza di $\xi \in]p,x[$ tale che

$$f(x) - f(p) = df(p)[x-p] + \frac{1}{2}d^2 f(\xi)[x-p]^2 = \frac{1}{2}q_{H_f}(\xi)[x-p]\,.$$

Essendo $\mathbb{B}_n(p,\delta[$ convesso e $p,\ x \in \mathbb{B}_n(p,\delta[$ avremo anche $[p,x] \subseteq \mathbb{B}_n(p,\delta[$ e quindi $\xi \in]p,x[\subseteq \mathbb{B}_n(p,\delta[$, da cui $q_{H_f}(\xi) > 0$ e quindi $\frac{1}{2}q_{H_f}(\xi)[x-p] > 0$, in quando $x-p \neq 0$. Ma allora la formula di Taylor col resto di Lagrange assicura che $f(x) - f(p) > 0$ per ogni $x \in B(p,\delta] \setminus \{p\}$, e che quindi p è un punto di minimo relativo stretto per f.

p. 127, riga 10: sostituire

Preso allora $u \in X \setminus \{0\}$

con

Preso allora $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

p. 128, due righe sopra il teorema 5.1.11: aggiungere

Dal precedente teorema segue in particolare che se vi sono sia autovalori strettamente positivi che autovalori strettamente negativi allora la forma quadratica associata alla matrice simmetrica A assume sia valori strettamente positivi che valori strettamente negativi.

p. 128, subito dopo il teorema 5.1.11: aggiungere

Gli A_j sono i cosiddetti minori principali di A.

p. 129, riga 3: sostituire

Osserviamo

con

Insomma, $(0,0)$ non è nè di massimo nè di minimo relativo per f. Osserviamo

p. 138, Teorema 5.3.4, penultima riga: sostituire

esiste anche $d_X f(x_0, y_0)$,

con

f é differenziabile in (x_0, y_0),

p. 140, Teorema 5.3.6, penultima riga: sostituire

$f(\cdot, y_0)$ è differenziabile in x_0

con

f é differenziabile in (x_0, y_0),

p. 143, prima riga della soluzione: aggiungere

Potremmo rispondere ai quesiti dell'esercizio osservando che possiamo risolvere esplicitamente l'equazione $f(x, y, z) = 0$ nella incognita z ottenendo

$$\varphi(x, y) = -\frac{2y \log(1 + x^2)}{\sin y} \qquad \forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \notin \pi\mathbb{Z}\},$$

ma a titolo di esempio, rispondiamo invocando il teorema del Dini.

p. 148, riga 4 della osservazione: sostituire

in questione di dimensione finita,

con

in questione di dimensione finita gli operatori lineari che agiscono fra questi spazi sono sempre continui e quindi

p. 149, subito dopo la definizione 5.5.2: aggiungere

Osservazione. Osserviamo che nelle premesse della precedente definizione, se $f \in C^k(D, E)$ è sia una biiezione che un diffeomorfismo locale di classe C^k, allora la sua inversa è di classe C^k in quanto dato $y_0 \in E$ e posto $x_0 \equiv f^{(-1)}(y_0)$ esistono un intorno aperto U di x_0 ed un intorno aperto V di y_0 tali che la restrizione $f_{|U}$ induca un diffeomorfismo di classe C^k di U su V. Ora dovendo essere $f^{(-1)}(y) = \left(f_{|U}\right)^{(-1)}(y)$ per ogni $y \in V$ ed essendo $\left(f_{|U}\right)^{(-1)}$ di classe C^k in V anche $f^{(-1)}$ è di classe C^k in V. Ne segue che f è un diffeomorfismo di classe C^k.

p. 164, al termine dell'enunciato della proposizione 5.5.3: aggiungere

(iii) *Se f è iniettiva e se $df(x)$ è un isomorfismo bicontinuo di X su Y per ogni $x \in D$ allora $f(D)$ è aperto ed f è un diffeomorfismo di classe C^k di D su $f(D)$.*

[Si ricordi che una mappa bicontinua è, per defnizione, una biiezione continua con la sua inversa ossia un omeomorfismo.]

p. p. 165, prime due righe del paragrafo 7.2: sostituire

Vogliamo ora introdurre una seconda forma della definizione di varietà differenziale. Per farlo ci serviremo della seguente.

con il seguente paragrafo introduttivo:

In questo paragrafo vorremmo studiare una classe di sottoinsiemi M di $\mathbb{R}^n$ (o più in generale di uno spazio normato di dimensione finita) che si presentano localmente attorno ad ogni punto p di M come zero insieme di una funzione g di un intorno aperto V di p in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^\nu$, con ν naturale minore o uguale a n. Così ad esempio siamo interessati a studiare l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,,$$

che si presenta, attorno ad ogni suo punto come zero insieme $Z(g)$ della funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$ definita da

$$g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

e siamo siamo interessati a studiare l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0\,, \\ x + y + z = 0\,, \end{cases}$$

che si presenta, attorno ad ogni suo punto come zero insieme $Z(g)$ della funzione $g \equiv (g_1, g_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definita da

$$g_1(x, y, z) \equiv x^2 - y^2 - 1\,, \qquad g_2(x, y, z) \equiv x + y + z \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Lo faremo formulando una ipotesi su g che assicuri che dato $p \in M$, l'insieme M sia, previa un eventuale scambio di coordinate (che è un particolare tipo di rotazione in $\mathbb{R}^n$), un grafico cartesiano. Questo perchè riteniamo che un grafico cartesiano sia più facile da trattare di un insieme che si presenta come zero insieme di una funzione.

Osserviamo allora che se M è intorno ad un punto $p \equiv (p_1, \ldots, p_n) \in M$ lo zero insieme di una funzione di classe C^1, ossia se esistono un intorno aperto V di p in $\mathbb{R}^n$ e $g \in C^1(V, \mathbb{R}^\nu)$ tale che

$$M \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}\,,$$

e che se la matrice Jacobiana

$$Dg(p) = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p)\,,$$

ha un minore di ordine ν non nullo, allora, salvo scambiare le coordinate, possiamo supporre che tale minore sia quello associato alle ultime ν colonne della matrice $Dg(p)$, ossia alla matrice quadrata di colonne $\frac{\partial g}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$ ove $m \equiv n-\nu$, e allora il teorema del Dini assicura l'esistenza di un intorno aperto U di $(p_1, \ldots, p_m)$ in $\mathbb{R}^m$ e di un intorno aperto W di $(p_{m+1}, \ldots, p_n)$ in $\mathbb{R}^\nu$ e di una funzione $\psi \in C^1(U, W)$ tali che

$$\begin{aligned}
&U \times W \subseteq V\,, \\
&\{(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in U \times W :\, g(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0\} \\
&\qquad = \{((x_1, \ldots, x_m), \psi(x_1, \ldots, x_m)) :\, (x_1, \ldots, x_m) \in U\} = \operatorname{graf} \psi\,.
\end{aligned}$$

Insomma, pur di supporre che M sia localmente intorno ad un suo punto p lo zero insieme di una funzione g di classe C^1 la cui matrice Jacobiana in p abbia un minore di ordine ν non nullo, ci assicuriamo che, salvo uno scambio di coordinate, l'insieme M sia localmente intorno a p il grafico di una funzione di classe C^1. Ricordiamo poi che la condizione di avere un minore di ordine ν non nullo equivale alla condizione che l'operatore lineare di matrice $Dg(p)$ di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^\nu$, ossia $dg(p)$ sia suriettivo. Essendo tale condizione importante per noi, decidiamo di dargli un nome, e lo facciamo mediante la seguente.

p. 165, riga 4: aggiungere

(iii) Per (ii) la mappa f è un diffeomorfismo locale e per (i) $f(D)$ l'insieme $f(D)$ è aperto. Ma allora, come da precedente osservazione, allora l'inversa $f^{(-1)}$ è di classe C^k su $f(D)$.

p. 167, riga 3 dal basso: aggiungere

Esercizio. Dire se l'insieme

$$M \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

è una varietà differenziale immersa in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Sia g la funzione di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Chiaramente $M = Z(g)$ e g è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$. Basterà allora provare che g è sommersiva in ogni punto di $Z(g)$. Dovremo cioè provare che se $(x, y, z) \in Z(g)$ allora la matrice $Dg(x, y)$ possiede almeno un minore 1×1 non nullo, ossia che possiede almeno una componente non nulla. Ora

$$Dg(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Ci chiediamo se vi siano punti $(x, y, z) \in M$ in cui tutti e tre le componenti di $Dg(x, y, z)$ sono nulle, ossia se il sistema

$$\begin{cases} 2x = 0\,, \\ 2y = 0\,, \\ 2z = 0\,, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \end{cases}$$

abbia soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tale sistema però non ha soluzioni e quindi non esistono punti $(x, y, z) \in M$ in cui tutte e tre le componenti di $Dg(x, y, z)$ sono nulle. In particolare $Dg(x, y, z)$ ha rango 1 in tutti i punti di M ossia g è sommersiva in tutti i punti di M e quindi M è una varietà differenziale di classe C^∞ immersa in $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - 2 = 1$ e codimensione 1.

p. 176, prima della riga 5 dal basso: aggiungere

Se invece ipotizziamo che M sia una varietà differenziale immersa e che $\varphi \in C^1(U, Y)$ sia iniettiva ed immersiva a valori in M allora $\varphi(U)$ è un aperto di M e φ è necessariamente un omeomorfismo sulla sua immagine, e quindi una parametrizzazione per M nel caso in cui $0 \in U$. Vale infatti il seguente.

Lemma 0.1.2 *Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Siano Y uno spazio normato reale di dimensione n ed M una varietà differenziale di dimensione m e di classe C^1 immersa in Y. Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^m$. Se $\varphi \in C^1(U, Y)$ è immersiva ed iniettiva e a valori in M allora $\varphi(U)$ è aperto in M e φ è un omeomorfismo di U su $\varphi(U)$ (con la topologia su di esso indotta da M). In particolare se $0 \in U$ allora φ è una parametrizzazione locale per M.*

Dimostrazione. Se $m = 0$ allora M è un inisime di punti isolati e l'enunciato segue dalle definizioni. Potremo quindi supporre che $m > 0$. Basterà provare che se $\tilde{u} \in U$ allora posto $p \equiv \varphi(\tilde{u})$ esistono un intorno aperto $\tilde{U}$ di $\tilde{u}$ contenuto in U ed un intorno aperto V_1 di p in Y tali che φ restringa un omeomorfismo di $\tilde{U}$ su $V_1 \cap M$.

Dal momento che M è varietà differenziale immersa in Y di dimensione m esistono un intorno aperto V di p in Y, un intorno aperto W di 0 in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ed un diffeomorfismo Φ di W su V di classe C^1 tali che $\Phi(0) = p$ e tali che

$$\Phi(W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) = V \cap M\,.$$

Detta $\pi_{\mathbb{R}^m}$ la proiezione canonica di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}^m$, la $\pi_{\mathbb{R}^m}$ restringe un omeomorfismo di $W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ sulla sua immagine

$$W_1 \equiv \pi_{\mathbb{R}^m}(W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}))\,.$$

Essendo φ continua in $\tilde{u}$ esiste un intorno aperto $U^\sharp$ di $\tilde{u}$ contenuto in U tale che

$$\varphi(U^\sharp) \subseteq V \cap M\,.$$

La mappa

$$\Psi \equiv \pi_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi^{(-1)} \circ \varphi_{|U^\sharp}$$

di $U^\sharp$ in W_1 è composta di funzioni di classe C^1 ed è quindi di classe C^1 e vale $\Psi(\tilde{u}) = 0$. Volendo applicare il teorema di inversione locale ora proviamo che $d\Psi(\tilde{u})$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}^m$ in sé. Basterà provarne l'iniettività. Cominciamo con l'osservare che da

$$\Phi^{(-1)} \circ \varphi(u) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \qquad \forall u \in U^\sharp\,,$$

segue che

$$d\Phi^{(-1)}(p) \circ d\varphi(\tilde{u})\,[\mathbb{R}^m] \leq \mathbb{R}^m \times \{0\}\,.$$

Se allora $\xi \in \mathbb{R}^m$ e

$$d\Psi(\tilde{u})[\xi] = \pi_{\mathbb{R}^m} \circ d\Phi^{(-1)}(p) \circ d\varphi(\tilde{u})[\xi] = 0\,,$$

allora

$$d\Phi^{(-1)}(p) \circ d\varphi(\tilde{u})[\xi] \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}\,,$$

e da quanto sopra $d\Phi^{(-1)}(p) \circ d\varphi(\tilde{u})[\xi] \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ e quindi

$$d\Phi^{(-1)}(p) \circ d\varphi(\tilde{u})[\xi] = 0\,.$$

Essendo ambo $d\Phi^{(-1)}(p)$ e $d\varphi(\tilde{u})$ iniettive, tale è anche la composta $d\Phi^{(-1)}(p) \circ d\varphi(\tilde{u})$ e quindi $\xi = 0$.

La mappa $d\Psi(\tilde{u})$ è dunque un isomorfismo ed il teorema di inversione locale implica che esistono un intorno aperto $\tilde{U}$ di $\tilde{u}$ contenuto in $U^\sharp$ ed un intorno aperto W_0 di 0 contenuto in W_1 tali che $\Psi_{|\tilde{U}}$ sia un diffeomorfismo di $\tilde{U}$ su W_0. Ora $\pi_{\mathbb{R}^m} \circ (\Phi^{(-1)})_{|V\cap M}$ è un omeomorfismo di $V \cap M$ su tutto W_1 e quindi $\left(\pi_{\mathbb{R}^m} \circ (\Phi^{(-1)})_{|V\cap M}\right)^{(-1)}(W_0)$ è un intorno aperto di p in $V \cap M$ ed esiste quindi un sottoinsieme aperto V_1 di Y tale che

$$\left(\pi_{\mathbb{R}^m} \circ (\Phi^{(-1)})_{|V\cap M}\right)^{(-1)}(W_0) = V_1 \cap M\,.$$

Inoltre $\pi_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi^{(-1)}$ restringe un omeomorfismo di $V_1 \cap M$ su W_0 e quindi la composta

$$\left(\pi_{\mathbb{R}^m} \circ (\Phi^{(-1)})_{|V\cap M}\right)^{(-1)} \circ \Psi_{|\tilde{U}}\,,$$

è un omeomorfismo di $\tilde{U}$ su $V_1 \cap M$. Ora

$$\left(\pi_{\mathbb{R}^m} \circ (\Phi^{(-1)})_{|V\cap M}\right)^{(-1)} \circ \Psi_{|\tilde{U}}(u)$$
$$= \left(\pi_{\mathbb{R}^m} \circ (\Phi^{(-1)})_{|V\cap M}\right)^{(-1)} \circ \pi_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi^{(-1)} \circ \varphi(u) = \varphi(u)$$

per ogni $u \in \tilde{U}$ e dunque φ è un omeomorfismo di $\tilde{U}$ su $V_1 \cap M$ come voluto. $\square$

p. 185, dopo la riga 7: aggiungere

(iv) Se $v \in Y$ è semitangente all'insieme M in p e se $\lambda \in]0, +\infty[$ allora λv è semitangente all'insieme M in p, come segue dalla definizione e dalla uguaglianza $\frac{\lambda v}{\|\lambda v\|_Y} = \frac{v}{\|v\|_Y}$.

p. 185, ultima riga dell'enunciato della proposizione 7.5.2: aggiungere
che è uno spazio vettoriale di dimensione m.

p. 186, riga 3 della osservazione: sostituire
Avremo allora
con
Sappiamo allora che $\operatorname{Ker} dg(p)$ ha dimensione $n - \nu = m$ e che

p. 186, penultima riga della osservazione: sostituire
il piano affine
con
lo spazio affine

p. 186, ultima riga della osservazione: sostituire
che il vettore
con
che se $m = n - 1$ il vettore

p. 186, ultima riga della osservazione: sostituire
piano affine
con
iperpiano affine

p. 186, 4 righe dal basso: sostituire
$Dg(x, y, z) = (x/2, y/2, 2z)$
con
$Dg(x, y, z) = (x/8, y/8, 2z)$

p. 187, riga 5: sostituire
$(1, 1, \sqrt{2}/2)$
con
$(1/4, 1/4, \sqrt{2})$

p. 187, riga 7: sostituire
$(x-2) + (y-2)$
con
$(1/4)(x-2) + (1/4)(y-2)$

p. 190, riga 1: sostituire
$\begin{pmatrix} -D\varphi(x_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
con
$(-D\varphi(x_0), 1)$

p. 190, ultima riga: aggiungere
ossia T_pM è un sottospazio di $\mathrm{Ker}\, df(p)$.

p. 199, riga 9: sostituire
$(2r(x^2+y^2)^2 2x, 2r(x^2+y^2)^2 2y, 4z^3)$
con
$(2r(x^2+y^2)2x, 2r(x^2+y^2)2y, 4z^3)$

p. 204, riga 3: sostituire
critici
con
stazionari

p. 211, riga 3 della definizione 7.8.4: sostituire
$x_1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} x_{n-1}$,
con
$x_1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} x_{n-1}$ se $n > 2$ e con il simbolo $\bar{\wedge} x_1$ se n=2,

p. 211, subito dopo la riga 5 della definizione 7.8.4: aggiungere
ove allo scopo di compattare le formule evitando dei distinguo, qui e più avanti si conviene di leggere $\bar{\wedge} x_1$ anzichè $x_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} x_{n-1}$ se $n = 2$.

p. 215, riga 3 della proposizione 7.9.4: sostituire
continua
con
continua v

p. 225, dopo la riga 2: aggiungere
Osservazione. Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio topologico. Gli insiemi aperti sono Boreliani in quanto elementi della topologia, la quale è contenuta nell'insieme dei Boreliani. Gli insiemi chiusi, in quanto complementari di aperti, che sono Boreliani, sono Boreliani. Ricordiamo infatti che il complementare di un elemento di una σ-algebra è ancora un elemento della σ-algebra. Sono quindi Boreliani anche intersezioni finite o numerabili di aperti e/o di chiusi ed unioni finite o numerabili di aperti e/o di chiusi. Questo è un fatto da tenere presente nello svolgimento di un esercizio.

p. 227, dopo l'ultima riga: aggiungere
Osservazione. Negli esercizi ci troveremo spesso a dover provare che un determinato sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è Lebesgue misurabile. È allora importante ricordare che i Boreliani di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili e che, come già osservato, intersezioni finite o numerabili di aperti e/o di chiusi ed unioni finite o numerabili di aperti e/o di chiusi sono Boreliani e quindi Lebesgue misurabili.

p. 230, riga sopra il paragrafo 8.3: aggiungere
Osservazione. Negli esercizi ci troveremo spesso a dover provare che una data funzione f definita su un sottoinsieme Lebesgue misurabile E di $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\tilde{\mathbb{R}}$ o in $\mathbb{K}$ è misurabile. È allora importante ricordare che se E è uguale ad una unione finita disgiunta di sottoinsiemi Lebesgue misurabili allora f è misurabile se e solo se tali sono tutte le le restrizioni di f a ciascuno di tali sottoinsiemi. Questo per il punto (vii) della precedente Proposizione.

p. 233, punto (vi) della proposizione 8.3.7: aggiungere
Se ciò accade allora

$$\int_A f_{|A}\, d\mu_{|\mathcal{M}_{|A}} = \int_A f\, d\mu = \int_X f \chi_A\, d\mu\,.$$

p. 233, riga 2 della osservazione: sostituire

$f \in \mathbb{C}^{X \setminus D}$

con

$f \in \mathbb{C}^{D}$

p. 233,, riga 2 dal basso: sostituire

Inoltre.......$\int_N |f| \, dm_n = 0$.

con il più semplice:

Inoltre essendo $m_n(\{x \in N : f(x) \neq 0\}) \leq m_n(N) = 0$ si ha $\int_N |f| \, dm_n = 0$.

p. 238, riga 3 dal basso: aggiungere

$a < b$

p. 241,ultime 4 righe dal basso: sostituire le ultime 4 righe con il seguente paragrafo introduttivo:

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto l'integrale di Lebesgue per funzioni di più variabili reali, ed ora ci domandiamo come calcolarli. Dal momento che, almeno in certi casi, abbiamo imparato a calcolare integrali di funzioni di una variabile reale, è naturale chiedersi se il calcolo di un integrale di una funzione di più variabili reali possa essere ricondotto al calcolo di integrali di una sola variabile reale.

Così ad esempio, se è assegnata una funzione misurabile f di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $[0, +\infty]$ ci domandiamo se si possa calcolare

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y) \, dm_2(x,y) \, ,$$

integrando $f(x,y)$ prima rispetto alla variabile y ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dm_1(y)$$

e poi rispetto alla variabile x ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dm_1(y) \right\} dm_1(x) \, .$$

Qui scriviamo $dm_2(x,y)$ anzichè dm_2 per ricordarci che l'integrazione avviene nella variabile (x,y), e scriviamo $dm_2(y)$ anzichè dm_1 per ricordarci che l'integrazione avviene nella variabile y, e scriviamo $dm_2(x)$ anzichè dm_1 per ricordarci che l'integrazione avviene nella variabile x.

Volendo procedere in questo modo e cioè per integrazione successiva su ciascuna singola variabile dovremo:

1) Anzitutto assicurarci che fissato $x \in \mathbb{R}$ abbia effettivamente senso considerare l'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y)$$
rispetto alla variabile y. Sappiamo che ciò sarebbe certamente vero se fissato $x \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,\cdot)$ della sola variabile y fosse misurabile e positiva. Putroppo però si potrebbero facilmente produrre esempi, che non esibiamo in questa sede, di funzioni f per cui ciò non avviene per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Quello che invece è vero, come vedremo fra poco con il teorema di Tonelli, è che la funzione $f(x,\cdot)$ della sola variabile $y \in \mathbb{R}$ è misurabile e positiva per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia che esiste un sottoinsieme N_1 di $\mathbb{R}$ di misura nulla tale che
$$f(x,\cdot) \text{ è misurabile in } \mathbb{R} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus N_1\,,$$
e questo assicura che ha effettivamente senso considerare l'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y)$$
per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus N_1$.

2) Dopo avere capito che non possiamo considerare $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y)$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, ma che lo possiamo considerare almeno per tutti gli $x \in \mathbb{R} \setminus N_1$ ci chiediamo se la funzione $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y)$ a valori in $[0,+\infty]$ della variabile x sia misurabile in $x \in \mathbb{R} \setminus N_1$, perchè allora potremmo estenderla a tutto $\mathbb{R}$ ponendola uguale ad esempio a zero su N_1 ed ottenere una funzione a valori in $[0,+\infty]$ misurabile su tutto $\mathbb{R}$, per poi calcolarne l'integrale nella variabile x e verificare se questi coincida con l'integrale $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_2(x,y)$ che ci interessa.

   Ed è qui che il teorema di Tonelli ci viene nuovamente in aiuto asserendo che esiste una funzione misurabile g di $\mathbb{R}$ in $[0,+\infty]$ che appunto estende la funzione $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y)$ della variabile x a tutto $\mathbb{R}$, ossia tale che
$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus N_1$$

e per cui risulta, come da noi sperato

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dm_1(x)\,,$$

uguaglianza che per abuso scriviamo nella forma

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y) \right\} dm_1(x)\,,$$

e qui, come già spiegato, l'abuso consiste nel fatto che la funzione in parentesi graffe è definita solo su $\mathbb{R}\setminus N_1$, ossia quasi ovunque, e non su tutto $\mathbb{R}$ come deve essere una funzione per essere integrata su tutto $\mathbb{R}$. Naturalmente, senza abusi avremmo anche potuto scrivere

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}\setminus N} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(y) \right\} dm_1(x)\,,$$

Questi argomenti valgono, sempre per il teorema di Tonelli, anche scambiando il ruolo di x e di y, e dunque Tonelli assicura che la funzione $f(\cdot,y)$ della sola variabile x è misurabile e positiva per quasi ogni $y\in\mathbb{R}$, ossia che esiste un sottoinsieme N_2 di $\mathbb{R}$ di misura nulla tale che

$$f(\cdot,y) \text{ è misurabile in } \mathbb{R} \text{ per ogni } y\in\mathbb{R}\setminus N_2\,,$$

e che quindi possiamo considerare $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(x)$ per ogni $y\in\mathbb{R}\setminus N_2$ e che inoltre esiste una funzione misurabile h di $\mathbb{R}$ in $[0,+\infty]$ che appunto estende la funzione $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(x)$ della variabile y a tutto $\mathbb{R}$, ossia tale che

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(x) \qquad \forall y\in\mathbb{R}\setminus N_2,$$

e per cui risulta, come da noi sperato

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} h(y)\,dm_1(y)\,,$$

uguaglianza che per abuso scriviamo

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_1(x) \right\} dm_1(y)\,.$$

In realtà, come vedremo con il teorema di Tonelli che stiamo per enunciare, questi argomenti valgono non solo per il caso in cui f sia una funzione misurabile di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $[0, +\infty]$ ma anche nel caso più generale in cui f sia una funzione misurabile di $\mathbb{R}^{r+s} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ in $[0, +\infty]$, con r ed s naturali non nulli.

p. 243, prime 5 righe: sostituire le prime 5 righe
con il seguente paragrafo:

Insomma, per le funzioni misurabili e positive di $r + s$ variabili, si può calcolarne l'integrale prima integrando sulle prime r variabili e poi sulle ultime s o viceversa. Vediamo subito un esempio nel caso $r = 1 = s$.

Esempio. Sia f la funzione di $\mathbb{R}^2$ in $[0, +\infty[$ definita da

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } (x, y) \in [0, 1]^2 \,, \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]^2 \,. \end{cases}$$

Calcolare l'integrale $\int_{\mathbb{R}^2} f \, dm_2$.
Soluzione. Cominciamo anzitutto col verificare che f sia misurabile. L'insieme $[0, 1]^2$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ ed è quindi misurabile. Inoltre f è continua su $[0, 1]^2$ in quanto restrizione della funzione continua $x^2 + y^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ma allora f è misurabile su $[0, 1]^2$. D'altra parte f è costantemente uguale a zero su $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]^2$ ed è quindi ivi misurabile. Essendo f misurabile sia sul misurabile $[0, 1]^2$ che sul suo complementare, f è misurabile su tutto $\mathbb{R}^2$ ed essendo a valori positivi possiamo calcolare l'integrale richiesto con il teorema di Tonelli

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) \, dm_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dm_1(y) \right\} dm_1(x) \,.$$

Osserviamo ora che se $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ allora $f(x, \cdot)$ è identicamente nulla per definizione e che quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dm_1(y) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \,.$$

Ma allora

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dm_1(y) \right\} dm_1(x) = \int_{[0,1]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dm_1(y) \right\} dm_1(x)$$

Osserviamo poi che se $x \in [0,1]$ allora $f(x,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ e che quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dm_1(y) = \int_{[0,1]} f(x,y)\, dm_1(y)\,.$$

Ma allora

$$\int_{[0,1]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dm_1(y) \right\} dm_1(x) = \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]} f(x,y)\, dm_1(y) \right\} dm_1(x)\,.$$

Osserviamo ora che se $x \in [0,1]$ allora $f(x,y) = x^2 + y^2$ per ogni $y \in [0,1]$ e che quindi $f(x,\cdot)$ è continua e quindi Riemann integrabile in $y \in [0,1]$. Ma allora $f(x,\cdot)$ è anche Lebesgue integrabile in $[0,1]$ e

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\, dm_1(y) = \int_0^1 x^2 + y^2\, dy$$

e abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]} f(x,y)\, dm_1(y) \right\} dm_1(x) &= \int_{[0,1]} \left\{ \int_0^1 x^2 + y^2\, dy \right\} dm_1(x) \\
&= \int_{[0,1]} \left\{ \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} \right\} dm_1(x) \\
&= \int_{[0,1]} \left\{ x^2 + \frac{1}{3} \right\} dm_1(x)\,.
\end{aligned}$$

Di nuovo osserviamo che $x^2 + \frac{1}{3}$ è continua e quindi Riemann integrabile in $x \in [0,1]$. Ma allora $x^2 + \frac{1}{3}$ è anche Lebesgue integrabile in $[0,1]$ e

$$\int_{[0,1]} \left\{ x^2 + \frac{1}{3} \right\} dm_1(x) = \int_0^1 \left\{ x^2 + \frac{1}{3} \right\} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}\,.$$

Dunque l'integrale richiesto dall'esercizio vale $\frac{2}{3}$.

Passiamo ora a considerare il caso in cui una funzione f di $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ abbia valori in $\mathbb{R}$ anzichè in $[0,+\infty]$. In questo caso, al fine di poter considerare l'integrale $\int_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_{r+s}$ non basta sapere che f è misurabile ma dobbiamo sapere che f è integrabile. Posto di saperlo, speriamo di poter calcolare l'integrale di f prima integrando nella variabile y ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_s(y)$$

e poi rispetto alla variabile x ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}^r} \left\{ \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_s(y) \right\} dm_r(x)\,,$$

Volendo procedere in questo modo e cioè per integrazione prima in y e poi in x dovremo:

1) Anzitutto assicurarci che fissato $x \in \mathbb{R}^r$ abbia effettivamente senso considerare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\, dm_s(y)$$

rispetto alla variabile y. Sappiamo che ciò sarebbe certamente vero se fissato $x \in \mathbb{R}^r$ la funzione $f(x,\cdot)$ della sola variabile y fosse integrabile. Putroppo però si potrebbero facilmente produrre esempi, che non esibiamo in questa sede, di funzioni integrabili f per cui ciò non avviene per tutti gli $x \in \mathbb{R}^r$. Quello che invece è vero, come vedremo fra poco con il teorema di Fubini, è che la funzione $f(x,\cdot)$ della sola variabile $y \in \mathbb{R}^s$ è integrabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^r$, ossia che esiste un sottoinsieme N_1 di $\mathbb{R}^r$ di misura nulla tale che

$$f(x,\cdot) \text{ è integrabile in } \mathbb{R}^s \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^r \setminus N_1\,,$$

e questo assicura che ha effettivamente senso considerare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_s(y)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^r \setminus N_1$.

2) Dopo avere capito che non possiamo considerare $\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_s(y)$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^r$, ma che lo possiamo considerare almeno per tutti gli $x \in \mathbb{R}^r \setminus N_1$ ci chiediamo se la funzione $\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_s(y)$ della variabile x sia integrabile in $x \in \mathbb{R}^r \setminus N_1$, perchè allora potremmo estenderla a tutto $\mathbb{R}^r$ ponendola uguale ad esempio a zero su N_1 ed ottenere una funzione integrabile su tutto $\mathbb{R}^r$, per poi calcolarne l'integrale nella variabile x e verificare se questi coincida con l'integrale $\int_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s} f(x,y)\, dm_{r+s}(x,y)$ che ci interessa.

Ed è qui che il teorema di Fubini ci viene nuovamente in aiuto asserendo che esiste una funzione integrabile g di $\mathbb{R}^r$ in $\mathbb{R}$ che appunto estende la funzione $\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_s(y)$ della variabile x a tutto $\mathbb{R}^r$, ossia tale che

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_s(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^r \setminus N_1,$$

e per cui risulta, come da noi sperato

$$\int_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_{r+s}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^r} g(x)\,dm_r(x)\,,$$

uguaglianza che per abuso scriviamo nella forma

$$\int_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_{r+s}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^r} \left\{\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_s(y)\right\} dm_r(x)\,.$$

Questi argomenti valgono, sempre per il teorema di Fubini, anche scambiando il ruolo di x e di y, e dunque Fubini assicura che se f è integrabile allora la funzione $f(\cdot,y)$ della sola variabile x è integrabile per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^s$, ossia che esiste un sottoinsieme N_2 di $\mathbb{R}^s$ di misura nulla tale che

$$f(\cdot,y) \text{ è integrabile in } \mathbb{R}^r \text{ per ogni } y \in \mathbb{R}^s \setminus N_2\,,$$

e che quindi possiamo considerare $\int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dm_r(x)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^s \setminus N_2$ e che inoltre esiste una funzione integrabile h di $\mathbb{R}^s$ in $\mathbb{R}$ che appunto estende la funzione $\int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dm_r(x)$ della variabile y a tutto $\mathbb{R}^s$, ossia tale che

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dm_r(x) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^s \setminus N_2,$$

e per cui risulta, come da noi sperato

$$\int_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_{r+s}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^s} h(y)\,dm_s(y)\,,$$

uguaglianza che col solito abuso scriviamo

$$\int_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dm_{r+s}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^s} \left\{\int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dm_r(x)\right\} dm_s(y)\,.$$

Enunciamo allora il seguente.

p. 243, dopo l'ultima riga: aggiungere

Osserviamo anche che abbiamo enunciato i teoremi di Tonelli e di Fubini per funzioni definite in $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, ma che spesso negli esercizi ci troveremo a dover calcolare integrali di funzioni f definite su un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ e a valori in $[0, +\infty]$ o in $\mathbb{R}$. In questo caso considereremo la funzione f_E di $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ e a valori in $[0, +\infty]$ o in $\mathbb{R}$ definita da

$$f_E(x,y) \equiv \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^{r+s} \setminus E\,, \end{cases}$$

ed osserveremo che f è integrabile in E se e solo se f_E è integrabile in $\mathbb{R}^{r+s}$ e che in tal caso $\int_E f\, dm_{r+s} = \int_{\mathbb{R}^{r+s}} f_E\, dm_{r+s}$ a causa della nullità di f sul complementare di E.

p. 249, punto (iii): sostituire

$\mathbb{R}^r$

con

$\mathbb{R}$

p. 268, riga 2: aggiungere la seguente soluzione dell'esercizio

Soluzione. Il dominio D è un aperto in quanto intersezione della palla aperta $\mathbb{B}_2(0,2)$ e dell'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che è complementare al chiuso $\{(0,0)\}$. Inoltre la integranda proposta, che denotiamo con f, è continua, in quanto composta di funzioni continue, e dunque misurabile nell'aperto D, oltre che a segno negativo. In particolare, potremo senz'altro considerare l'integrale dato, che potrebbe uguagliare sia un numero reale che $-\infty$.

Vorremmo calcolare l'integrale dato utilizzando le coordinate polari. Ricordando che la trasformazione P_2 in coordinate polari induce un diffeomorfismo di $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times\{0\})$, osserviamo che $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times\{0\})$ di non contiene i punti di D della semiretta $[0, +\infty[\times\{0\}$, che però sappiamo avere misura nulla. Come al solito in questi casi osserviamo allora che

$$\begin{aligned}
&\int_D f(x,y)\, dxdy \\
&\qquad = \int_{D\setminus([0,+\infty[\times\{0\})} f(x,y)\, dxdy + \int_{D\cap([0,+\infty[\times\{0\})} f(x,y)\, dxdy \\
&\qquad = \int_{D\setminus([0,+\infty[\times\{0\})} f(x,y)\, dxdy + 0\,,
\end{aligned}$$

e ci proponiamo di calcolare $\int_{D\setminus([0,+\infty[\times\{0\})} f(x,y)\, dxdy$ utilizzando le coordinate polari. Calcoliamo allora $U \equiv P_2^{\leftarrow}(D\setminus([0,+\infty[\times\{0\}))$ tenendo presente che per nessun punto $(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ si può avere $P_2(\rho,\theta) \in ([0,+\infty[\times\{0\})$ e che quindi

$$\begin{aligned}\{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:\ & P_2(\rho,\theta) \in D\setminus([0,+\infty[\times\{0\})\} \\ &= \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:\ P_2(\rho,\theta) \in D\}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} U &= \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:\ P_2(\rho,\theta) \in D\setminus([0,+\infty[\times\{0\})\} \\ &= \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:\ P_2(\rho,\theta) \in D\} \\ &= \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:\ 0 < (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 < 4\} \\ &= \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:\ 0 < \rho < 2\} =]0,2[\times]0,2\pi[= D_{]0,2[}(0,2\pi)\,,\end{aligned}$$

ove $D_{]0,2[}(0,2\pi)$ denota il dominio normale rispetto all'asse delle ρ determinato dalle funzioni costanti 0 e 2π. Per il teorema di cambiamento di variabili la funzione f risulta integrabile nell'aperto $D\setminus([0,+\infty[\times\{0\})$ se e solo se la funzione $f\circ P_2|\det(DP_2)|$ risulta integrabile nel dominio normale U. Notiamo ora che

$$f\circ P_2(\rho,\theta)|\det(DP_2)(\rho,\theta)| = \sin^2\theta\,\log(\rho^2/4)\rho \qquad \forall(\rho,\theta) \in D_{]0,2[}(0,2\pi)\,.$$

La funzione $\sin^2\theta\log(\rho^2/4)\rho$ è misurabile ed ha segno costante in $D_{]0,2[}(0,2\pi)$ e possiamo quindi calcolare l'integrale di $\sin^2\theta\log(\rho^2/4)\rho$ su $D_{]0,2[}(0,2\pi)$ utilizzando la formula di integrazione per fili e ottenendo così

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,dxdy &= \int_{P_2^{\leftarrow}(D)} f\circ P_2(\rho,\theta)|\det(DP_2)(\rho,\theta)|\,d\rho d\theta \\ &= \int_{D_{]0,2[}(0,2\pi)} \sin^2\theta\log(\rho^2/4)\rho\,d\rho d\theta \\ &= \int_0^2\left\{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\log(\rho^2/4)\rho\,d\theta\right\}d\rho = \int_0^2 \log(\rho^2/4)\rho\left\{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right\}d\rho \\ &= \int_0^2\log(\rho^2/4)\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Lasciamo poi al lettore il terminare il calcolo dei due integrali di Riemann a secondo membro.

p. 270, 4 righe dal termine della dimostrazione: aggiungere il commento
Osserviamo infatti che

$$\chi_{E_\alpha} \circ \Psi(x,z,\theta) = \chi_{E\times]0,\alpha[}(x,z,\theta) \qquad \forall(x,z,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,2\pi[\,.$$

Se infatti $(x,z,\theta) \in E\times]0,\alpha[$ allora $\Psi(x,z,\theta) \in \Psi(E\times]0,\alpha[) = E_\alpha$ e quindi ambo i membri sono uguali a 1.

Se invece $(x,z,\theta) \in (]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,2\pi[) \setminus E\times]0,\alpha[$ allora $\Psi(x,z,\theta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Psi(E\times]0,\alpha[) = \mathbb{R}^3 \setminus E_\alpha$ e dunque ambo i membri sono uguali a 0.

p. 271, terza riga della Proposizione 8.9.2: sostituire
$x \in E$
con
$z \in E$

p. 271, ultima riga dal basso: sostituire
$E \times [0,+\infty[$
con
$[0,+\infty[\times E$

p. 286, riga 2: sostituire
(o anche
con
(o anche m-varietà parametrica, o

p. 286, riga 4: aggiungere
Diremo poi sostegno di φ l'insieme $\varphi(D)$.

p. 286, riga 7: sostituire
$m \geq 1$
con
$m = 1$

p. 286, riga 2 dopo la definizione 9.2.2: sostituire
$m \geq 1$
con
$m = 1$

p. 286, osservazione (i): aggiungere

È importante notare che $l_m(\varphi)$ è un elemento di $[0,+\infty]$ che dipende da φ e che in generale potremmo benissimo avere due m-varietà parametriche φ_1 e φ_2 come nella definizione precedente tali che $\varphi_1(D)=\varphi_2(D)$, ma per cui $l_m(\varphi_1)\neq l_m(\varphi_2)$. In un paragrafo successivo introdurremo delle condizioni affinchè l'uguaglianza $\varphi_1(D)=\varphi_2(D)$ implichi che $l_m(\varphi_1)=l_m(\varphi_2)$.

p. 287, osservazione (iii): aggiungere

Abbiamo poi già osservato che $(\det(d\varphi(u))^t(d\varphi(u)))^{1/2}$ uguaglia la misura m-dimensionale del parallelotopo di vertici $\partial_{u_1}\varphi(u),\ldots,\partial_{u_m}\varphi(u)$, e nel caso $m=n-1$ anche il modulo del prodotto $\partial_{u_1}\varphi(u)\bar{\wedge}\ldots\bar{\wedge}\partial_{u_{n-1}}\varphi(u)$ e quest'ultimo fatto è già noto al lettore nel caso $n=3$ dai corsi di geometria e di fisica ove è stato introdotto il prodotto vettoriale, spesso indicato con il simbolo $\times$.

p. 293, subito dopo la riga 2: aggiungere

Corollario 0.1.3 *Siano $m,k,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $m\le n$. Sia $(X,(\cdot,\cdot)_X)$ uno spazio Euclideo di dimensione n. Siano D, E sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^m$. Siano poi $\varphi_1\in C^k(D,X)$ e $\varphi_2\in C^k(E,X)$ due m-varietà parametriche tali che $\varphi_1(D)=\varphi_2(E)$ e tali che φ_1 e φ_2 siano omeomorfismi immersivi sulla loro immagine. Allora valgono le seguenti affermazioni*

(i) Sia f una funzione di $\varphi_1(D)$ in $[0,+\infty]$. Allora f è misurabile sulla varietà parametrica φ_1 se e solo se f è una funzione misurabile sulla varietà parametrica φ_2. Se ciò accade abbiamo

$$\int_{\varphi_1} f\,d\sigma=\int_{\varphi_2} f\,d\sigma\,.$$

(ii) Sia f una funzione di $\varphi_1(D)$ in $\mathbb{C}$. Allora f è integrabile sulla varietà parametrica φ_1 se e solo se lo è sulla varietà parametrica φ_2. Se ciò accade abbiamo

$$\int_{\varphi_1} f\,d\sigma=\int_{\varphi_2} f\,d\sigma\,.$$

(iii) $l_m(\varphi_1)=l_m(\varphi_2)$.

Dimostrazione. Si può provare che la biiezione $\varphi_1^{(-1)}\circ\varphi_2$ è un diffeomorfismo di E su D e pertanto l'asserto segue dalla proposizione precedente. □

Insomma, se un insieme è immagine di almeno una m-varietà parametrica φ che sia immersiva e che sia un omeomorfismo sulla sua immagine allora $l_m(\varphi)$ non dipende da una tale φ e possiamo quindi pensare $l_m(\varphi)$ come m-misura di tale insieme.

p. 297, riga 6 dal basso: sostituire

$((d\varphi(u,\theta))^t d\varphi(u,\theta))^{1/2}$

con

$(\det(d\varphi(u,\theta))^t d\varphi(u,\theta))^{1/2}$

p. 301, riga 1: sostituire

l'elemento 0 di posto $(3,1)$ della matrice

con

v

p. 301, prime 2 righe del 9.6: sostituire

Ci proponiamo ora di definire......in uno spazio Euclideo X

con

Abbiamo definito la misura m-dimensionale dei parallelotopi con m vertici in uno spazio Euclideo.

Abbiamo poi visto che se un sottoinsieme di uno spazio Euclideo è immagine di almeno una m-varietà parametrica φ che sia immersiva e che sia un omeomorfismo sulla sua immagine allora $l_m(\varphi)$ non dipende da una tale φ e che possiamo quindi prendere come definizione di misura m-dimensionale di tale insieme proprio $l_m(\varphi)$.

Ora vorremmo introdurre la misura m-dimensionale di una varietà differenziale di dimensione m in uno spazio Euclideo. Il problema c'è perchè in generale le varietà differenziali di dimensione m non sono immagini di m-varietà parametriche che siano omeomorfismi immersivi.

Così ad esempio la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ non può essere l'immagine di una 2-varietà parametrica φ che sia un omeomorfismo sulla sua immagine, perchè se lo fosse il suo dominio, diciamo D, sarebbe omeomorfo alla sfera unitaria, che è compatta, e quindi anche D sarebbe compatto e quindi l'aperto D sarebbe anche un chiuso non vuoto limitato di $\mathbb{R}^3$ e la connessione di $\mathbb{R}^3$ implicherebbe che $D = \mathbb{R}^3$, un assurdo.

Volendo assegnare una misura 2-dimensionale alla sfera unitaria $\partial\mathbb{B}_3(0,1)$, possiamo pensare di esprimere $\partial\mathbb{B}_3(0,1)$ come unione disgiunta delle immagini delle due 2-varietà parametriche cartesiane

$$\varphi_\pm \equiv \pm\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{B}_2(0,1)\,,$$

che sono immersive e che sono omeomorfismi sulla loro immagine, e della linea equatoriale $\tau \equiv (\partial\mathbb{B}_3(0,1)) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ ed è naturale chiedersi se si possa accettare come misura 2-dimensionale della sfera $\partial\mathbb{B}_3(0,1)$ la somma

$$l_2(\varphi_+) + l_2(\varphi_-) + (\text{candidato a } 2 - \text{misura di } \tau)\,,$$

ma allora sorgono in modo naturale delle domande. Anzitutto che misura 2-dimensionale associamo alla linea equatoriale τ?

E poi supposto che $\partial\mathbb{B}_3(0,1)$ venga espresso come una diversa unione disgiunta di immagini di altre 2-varietà parametriche immersive che siano omeomorfismi sulla loro immagine e di un restante insieme differenza, otterremmo la stessa somma?

Così ad esempio sfuttando il diffeomorfismo della trasformazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^3$ possiamo considerare la 2-varietà parametrica ψ definita da

$$\psi(\theta,\phi) \equiv (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \qquad \forall(\theta,\phi) \in]0,\pi[\times]0,2\pi[\,,$$

il cui sostegno è la sfera unitaria $\partial\mathbb{B}_3(0,1)$ privata dell'insieme $\mu \equiv (\partial\mathbb{B}_3(0,1)) \cap ([0,+\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R})$ e ci chiediamo se

$$\begin{aligned} &l_2(\varphi_+) + l_2(\varphi_-) + (\text{candidato a } 2 - \text{misura di } \tau) \\ &\qquad = l_2(\psi) + (\text{candidato a } 2 - \text{misura di } \mu)\,. \end{aligned}$$

Per rispondere a queste domande si definisce la misura di Lebesgue su una qualsiasi varietà differenziale M immersa in uno spazio euclideo X.

p. 306, riga 6 dal basso: sostituire

e che quindi avremo

con

Osserviamo poi che $\cos\theta \le 0$ se $\theta \in]-\pi,\pi[\setminus]-\pi/2,\pi/2[$ e che quindi

$$\begin{aligned} &\{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\colon\ \rho < r\cos\theta\} \\ &\qquad = \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\colon\ \rho < r\cos\theta\} = D_{]-\pi/2,\pi/2[}(0, r\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

Integrando per fili sul dominio normale $D_{]-\pi/2,\pi/2[}(0, r\cos\theta)$ rispetto all'asse delle θ avremo allora

p. 306, riga 4 dal basso: sostituire
$\{(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\colon \rho < r\cos\theta\}$
con
$D_{]-\pi/2,\pi/2[}(0, r\cos\theta)$

p. 306, righe 2 e 3 dal basso: sostituire (in 7 occorrenze)
π
con
$\pi/2$

p. 306, ultima riga: sostituire
π
con
$\pi/2$

p. 306, ultima riga: sostituire
$2r^2[(\pi - 1) - (-1)] = 2r^2(\pi - 2)$
con
$2r^2[(\pi/2) - 1] = r^2(\pi - 2)$

p. 308, prima riga dell'enunciato (ii) del 9.6.8: sostituire
misurabile di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}$. Allora f è integrabile se e solo se
con
integrabile di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}$. Allora

p. 308, riga 5 dell'enunciato (ii) del 9.6.8: sostituire
Se ciò accade si ha
con
Inoltre

p. 315, riga 6: aggiungere il fattore
2
di fronte all'integrale

p. 319, riga 8 dal basso: sostituire
le mappe
con
le mappe lineari

p. 328, riga 10 dal basso: sostituire
$\{(-1,0)\}$
con
$\{(1,0)\}$

p. 332, fine riga 6: aggiungere
$= \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f \circ \alpha)'(t)\, dt$

p. 341, riga 7: sostituire
Avremo $\alpha'(t) = (0,1)$
con
Avremo $\alpha(0) = (0,1) = \gamma(0)$, $\alpha(\pi) = (0, 1+\pi) = \gamma(\pi)$, $\alpha'(t) = (0,1)$

p. 341, riga 4 della soluzione: sostituire
Sappiamo poi che
con
Essendo D convesso e quindi semplicemente connesso ed essendo ω chiusa, la ω è esatta e sappiamo che

p. 355, riga 4: sostituire
vol
con
sgn vol

p. 355, riga 5: sostituire
det
con
sgn det

p. 355, riga 9: sostituire, in due occorrenze,
det
con
sgn det

p. 426, riga 3: sostituire
$p(x)$.
con

$p(x)$, di molteplicità rispettive $\nu_1, \dots, \nu_r$.