FALG
11 LUGLIO 2018

M. LONGO

Esercizio 1 (6 punti)**.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo di V.

(a) Siano λ e μ due autovalori di ϕ e siano v e w due autovettori per ϕ di autovalori λ e μ, rispettivamente. E' vero o falso che se $\lambda \neq \mu$ allora v e w sono linearmente indipendenti? Fornire una dimostrazione o un controesempio.

(b) Supponiamo che $\phi \circ \phi = \phi$. Dimostrare che se λ è un autovalore di ϕ, allora $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

Esercizio 2 (4 punti)**.** Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f_a(1,0,1) = (1,1,0,0); \quad f_a(1,1,0) = (0,0,1,1);$$

$$f_a(0,0,1) = (1,1,1,1); \quad f_a(2,1,2) = (2,2,2,a+1).$$

Per tali valori di a, determinare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine di f_a.

Esercizio 3 (4 punti)**.** Si $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, con $v_1 = (1,1,1,1)$ e $v_2 = (0,0,1,1)$. Sia inoltre W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) che soddisfano il seguente sistema:

$$W : \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcolare $U \cap W$ e $U + W$, specificandone le dimensioni.

Esercizio 4 (6 punti)**.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, definiamo l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a-3 & 2-a & a-1 \\ 2a-2 & -2a+2 & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Posto $a = 1$, trovare tutti gli autospazi di f_1.

(b) Discutere la diagonalizzabilità di A_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, consideriamo il sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + (a^2 - a - 1)x_4 = a. \end{cases}$$

Discutere la risolubilità del sistema. In tutti i casi in cui il sistema ammetta più di una soluzione, determinare la soluzione del sistema esprimendola nella forma $X_0 + W$ dove X_0 è una soluzione del sistema e W un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 6 (6 punti)**.** Sia π il piano di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e sia r la retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e parallela al vettore $(0, 1, 1)$.

(a) Trovare la proiezione ortogonale della retta r sul piano π, indicandola con s.

(b) Sia $Q = r \cap \pi$ il punto di intersezione tra r e π. Trovare tutti i quadrati contenuti in π che hanno un vertice in Q, i lati di lunghezza 1 e un lato sulla retta s.