FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
11 FEBBRAIO 2016

DOCENTE: MATTEO LONGO

1. Domande

Domanda 1. Sia $\phi : V \to W$ una funzione lineare iniettiva. Dimostrare che se $v_1, \dots, v_n$ sono n vettori linearmente indipendenti di V, allora $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono vettori linearmente indipendenti di W.

Domanda 2. Supponiamo che v e w siano due autovettori di un endomorfismo $\phi : V \to V$ relativi a due autovalori λ e μ. Dimostrare che se $\lambda \neq \mu$ allora v e w sono linearmente indipendenti. Vale anche il viceversa?

Domanda 3. Siano $U = \langle u_1 u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ due sottospazi, entrambi di dimensione 2, di uno spazio vettoriale reale V. Supponiamo che $U \cap W = \langle v \rangle$ abbia dimensione 1 e scegliamo due vettori $u \in U$, $w \in W$ tali che $u \notin U \cap W$ e $w \notin U \cap W$. Dimostrare che $\{u, v, w\}$ è una base di $U + W$.

Domanda 4. Sia U un sottospazio di dimensione n di uno spazio vettoriale reale V di dimensione $N > n$. Fissiamo una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ di U, fissiamo un vettore $u \in V$ e definiamo $W = U + \langle u \rangle$, dove $\langle u \rangle$ è il sottospazio generato da u. Dimostrare che l'insieme di $n + 1$ vettori $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è una base di W se e solo se $u \notin U$.

Domanda 5. Scrivere il polinomio caratteristico di un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sapendo che ϕ non è iniettivo, non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ed un suo autovalore è $3 + 5i$.

2. Esercizi

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ considerare la seguente matrice:

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & a(a+1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (a-1)^2 & a(a+1) & -a(a-2) & a(a-1) \\ a(a-1) & 0 & -a(a-1) & a^2 \end{pmatrix}.$$

(1) Dire per quali valori di a la matrice è invertibile.
(2) Posto $a = 0$, determinare gli autovalori ed i relativi autospazi di A_0. La matrice A_0 è diagonalizzabile?
(3) Al variare del parametro a, discutere la diagonalizzabilità di A_a.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile X. Dire se i quattro vettori $f_1(X) = 1 + X^2$, $f_2(X) = X$, $f_3(X) = X^2 + X^3$ e $f_4(X) = X^3$ formano una base di V ed in questo caso trovare la matrice H di cambio di base dalla base $\mathcal{C} = \{1, X, X^2, X^3\}$ alla base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Trovare infine H^{-1}.

Esercizio 3. Discutere la risolubilità in $\mathbb{R}$ del seguente sistema lineare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + a(a-1)x_4 = a \end{cases}$$

Trovare, se esistono, tutti i valori di a per i quali $(2, 0, 0, 1)$ è soluzione del sistema Σ_a.

Esercizio 4.

(1) Determinare dimensione e base del sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(2) Trovare la dimensione ed una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, 0, 0)$, $(2, 4, 2, 3)$, $(-1, -2, 4, 6)$.

(3) Determinare dimensione e base di $V \cap W$ e $V + W$.

Esercizio 5. Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno norma 5 e la cui proiezione ortogonale sul sottospazio $U : x_1 - x_2 = 0$ sia uguale a $(1, 1, -1)$.

Esercizio 6. Trovare la retta di minima distanza tra le due rette sghembe r ed s descritte dalle seguenti condizioni:

$$r : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \qquad s : (1, 1, 1) + \langle (0, 1, 0) \rangle.$$

Esercizio 7. Sia $V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici a due righe e due colonne a coefficienti reali. Sia $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ una base di V. Sia inoltre $W = \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici a coefficienti reali a due righe e tre colonne e sia $\mathcal{C} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ una base di W. Definiamo una funzione lineare $\phi : V \to W$ nel modo seguente:

$$\phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \phi\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \qquad \phi\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Scrivere la matrice di ϕ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Trovare dimensioni e basi del nucleo di ϕ e dell'immagine di ϕ.