TOPOLOGIA -LAUREA IN MATEMATICA

M. LONGO
TEMPO: 2 ORE E 30 MINUTI.

Esercizio 1. Calcolare il gruppo fondamentale della somma connessa di due tori.

Esercizio 2. Descrivere tutti i ricoprimenti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{R}^3 - (\mathbb{S}^1 \cup r \cup s)$ lo spazio topologico ottenuto rimuovendo da $\mathbb{R}^3$ le tre rette

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \qquad t : \begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ di X in un suo punto x_0.

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Definiamo i seguenti cammini:

$$\alpha(t) = (\cos(\pi t), \sin(2\pi t)) ,$$
$$\beta(t) = (\cos(\pi t), -\sin(2\pi t)) ,$$
$$\gamma(t) = \left(t, \frac{\sqrt{1-t^2}}{2} \right) .$$

Dire se α e β sono equivalenti, e se lo sono α e γ, giustificando le risposte.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e sia G un insieme finito di automorfismi di X. Supponiamo che nessun elemento di g abbia un punto fisso, *i.e.*, $g(x) \neq x$ per ogni $g \in G$. Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo su X.

Date: 25 Gennaio 2019.