Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

canale 4, M. Longo

Appello – 13 Settembre 2013

DOMANDE

(1) Supponiamo che $v_1, v_2, \dots, v_n$ sia una base dello spazio vettoriale V. Dimostrare che anche $v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n$ è una base di V.

(2) (a) Sia $f : V \to V$ una funzione lineare dello spazio vettoriale V in sè. Completare la definizione: il vettore $v \in V$ è un autovettore per f se...
(b) Supponiamo che f sia invertibile. È vero che se v è autovettore per f allora v è autovettore anche per f^{-1}? (breve dimostrazione o controesempio)

(3) Nello spazio $\mathbb{R}^n$ con il solito prodotto scalare è fissato il vettore $u \neq 0$. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ determinare un $x \in \mathbb{R}$ tale che $v - xu$ sia ortogonale ad u.

ESERCIZI

Esercizio 1. Al variare del parametro reale k, si considerino le matrici

$$A_k := \begin{pmatrix} 0 & k(k+1) & k^k - k - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - k & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare tutti i valori del parametro k per i quali la matrice A_k risulta diagonalizzabile.
(2) Per ciascuno dei valori del parametro k determinati al punto precedente, determinare una base di autovettori per A_k.
(3) Per tutti i valori del parametro k per i quali A_k risulta diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale D_k ed una matrice invertibile H_k tali che $A_k = H_k D_k H_k^{-1}$.
(4) Per H_k determinata al punto precedente, si calcoli H_k^{-1}.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A_k è $t^2(t-1)^2$. Si vede facilmente che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 2 se e solo se $k = 0$ oppure $k = -1$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2 se e solo se $k = 0$ oppure $k = 1$. Quindi la matrice risulta diagonalizzabile se e solo se $k = 0$. In questo caso una base dell'autspazio relativo all'autovalore 0 è data dai primi due vettori della base canonica, mentre una base dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è data dai vettori $(1, 0, -1, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$. Risulta pertanto:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo diretto permette poi di trovare H_0^{-1}. □

Esercizio 2. Si considerino le due funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definite dalle seguenti condizioni:

$$f(1,1,0) = (1,2,1,0); \quad f(0,1,1) = (0,1,0,1); \quad f(0,0,1) = (0,0,-1,1);$$
$$g(x,y,z,w) = (-3x + 3y - 3z, -x + y - z, -2x + 2y - 2z, -3x + 3y - 3z)).$$

(1) Determinare la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.
(2) Calcolare l'immagine $V := \mathrm{im}(f)$ di f, specificandone la dimensione.
(3) Calcolare il nucleo $W = \ker(g)$ di g, specificandone la dimensione.
(4) Determinare il numero minimo di equazioni necessario a descrivere W, giustificando la risposta. Determinare inoltre un insieme minimo di equazioni che descrivono W.

(5) Determinare $U = V \cap W$, l'intersezione dell'immagine di f e del nucleo di g.
(6) Determinare una base ortonormale di U.
(7) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v = (1,1,1,1)$ su U.

Svolgimento. Le immagini dei vettori della base canonica sono $f(1,0,0) = (1,0,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,1,1,0)$ e $f(0,0,1) = (0,0,-1,1)$ ottenute esprimendo i vettori della base canonica come combinazione dei tre vettori dati) quindi la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 3 e l'immagine ha quindi dimensione 3, generata dai vettori $(1,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$ e $(0,0,-1,1)$ (le sue colonne). Il nucleo di g si ottiene dal sistema $-x+y-z=0$, e quindi ha dimensione 3, generato dai 3 vettori $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Il teorema di Rouché-Capelli stabilisce che il rango del sistema che descrive W è uguale al numero delle incognite, 4, meno la dimensione di W, 3, quindi il numero cercato è $4-3=1$. L'equazione che descrive W è quindi $-x+y-z=0$. Per determinare l'intersezione tra V e W, prendiamo un vettore generico di V, scritto come

$$a(1,1,0,0) + b(0,1,1,0) + c(0,0,-1,1) = (a, a+b, b-c, c),$$

ed imponiamo che soddisfi l'equazione $-x+y-z=0$ che descrive W. Si ottiene l'equazione

$$-a + a + b - (b-c) = 0$$

ovvero $c = 0$. Risulta quindi che U è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $(1,1,0,0)$ e $(0,1,1,0)$, e quindi U ha dimensione 2. Una base ortonormale di U si determina facilmente utilizzando Gramm-Schmidt: $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ e $u_2 = (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0)$. La proiezione del vettore richiesto si determina utilizzando il metodo di Gramm-Schmidt come $(v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$, e risulta $(2/3, 4/3, 2/3, 0)$. □

Esercizio 3. Sia π il piano dello spazio affine euclideo di dimensione 3 descritto dall'equazione cartesiana $x - y + z = 2$.

(1) Scrivere l'equazione parametrica di π.
(2) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $P = (1,1,1)$ e perpendicolare al piano π.
(3) Calcolare la distanza d del punto P dal piano π, determinando il punto $Q \in \pi$ di minima distanza.

Svolgimento. L'equazione parametrica di π è $(2,0,0) + \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$. La retta r ha equazione parametrica $(1,1,1) + \langle (1,-1,1) \rangle$ ed una sua equazione cartesiana è

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

L'intersezione tra r e π è il punto Q richiesto, che risulta la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

ovvero $Q = (4/3, 2/3, 4/3)$. La distanza risulta quindi la norma di $Q - P$, ovvero la norma del vettore $(1/3, -1/3, 1/3)$, che vale $1/\sqrt{3}$. □

Esercizio 4. Sia $f(X)$ un polinomio di grado 4 a coefficienti reali. Sapendo che due delle soluzioni dell'equazione $f(X) = 0$ sono i e $2 - i$, dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria, si determini f.

Svolgimento. Se i e $2-i$ sono radici di f, anche $-i$ e $2+i$ lo sono, quindi, visto che un polinomio di grado 4 ha esattamente 4 radici (in $\mathbb{C}$) si ottiene che le 4 radici di f sono i, $-i$, $2+i$ e $2-i$, quindi

$$f(X) = (X-i)(X+i)(X-2-i)(X-2+i) = (X^2+1)((X-2)^2+1) =$$
$$= (X^2+1)(X^2-2X+5) = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5.$$

□