FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI 15 SETTEMBRE 2016

MATTEO LONGO

Esercizio 1 (5 punti). Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si definisca l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1-a & a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Trovare tutti i valori di a per i quali il vettore $(1, 0, -1)$ è un autovettore di f_a.
(2) Discutere la diagonalizzabilità di A_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Il vettore $v = (1, 0, -1)$ è un autovettore se e solo se $A_a v = \lambda v$ per qualche λ. Risolvendo il sistema si ottiene facilmente che questo è possibile se e solo se $a = 0$. Il polinomio caratteristico risulta $(1 - X)^2(a - X)$. Se $a = 1$, ho tre autovalori coincidenti, ed il rango della matrice $A_a - 1$ risulta 2, quindi la matrice non è diagonalizzabile. Se $a \neq 1$, la matrice risulta diagonalizzabile se e solo se il rango della matrice $A_a - 1$ è 1; poichè

$$A_a - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1-a & a-1 & 1-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

risulta che questo avviene se e solo se $a = 0$. □

Esercizio 2 (5 punti, versione A). Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 in una variabile a coefficienti reali. Indichiamo con $D : V \to V$ la derivata di un polinonio.

(1) Si trovi la matrice di D rispetto alla base $\{1, X, X^2\}$ di V.
(2) L'applicazione lineare D di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali è diagonalizzabile?

Svolgimento. Poichè $D(1) = 0$, $D(X) = 1$ e $D(X^2) = 2X$, la matrice della derivata rispetto alla base richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che non è diagonalizzabile (ad esempio, basta notare che il polinomio caratteristico è X^2, e l'applicazione non è identicamente nulla). □

Esercizio 3 (5 punti, versione B). Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 in una variabile a coefficienti reali. Indichiamo con $\pi : V \to V$ la proiezione sul sottospazio $U = \langle 1 - X, X^2 \rangle$ lungo la direzione $W = \langle X \rangle$ (si ricordi che tale proiezione si ottiene scrivendo in modo unico un vettore v di V come somma $v = u + w$ di un vettore di $u \in U$ ed uno di $w \in W$, e definendo $\pi(v) := u$).

(1) Si trovi la matrice di π rispetto alla base $\{1, X, X^2\}$ di V.
(2) Si trovi la matrice di π rispetto alla base $\{1 - X, X^2, X\}$ di V. L'applicazione lineare π è diagonalizzabile?

Svolgimento. Noto che $1 = 1 - X + X$, quindi $\pi(1) = 1 - X$; $\pi(X) = 0$; $\pi(X^2) = X^2$, quindi la prima matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre la seconda matrice richiesta è ovviamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è diagonale; quindi π è diagonalizzabile. □

Esercizio 4 (5 punti)**.** Definiamo, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^4$ sulla base canonica nel seguente modo:

$$f_a((1,0,0,0)) = (1,1,1,1); \quad f_a((0,1,0,0)) = (-1,0,0,2);$$
$$f_a((0,0,1,0)) = (1,1,2,0); \quad f_a((0,0,0,1)) = (0,0,0,a(a+2)).$$

(1) Determinare tutti i valori di a per i quali il vettore $(0,0,0,a+2)$ appartiene all'immagine di f_a.
(2) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, determinare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine di f_a.

Svolgimento. I valori per i quali il vettore richiesto appartiene all'immagine sono tutti e soli i valori per i quali il sistema seguente è risolubile:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + a(a+2)x_4 = a+2 \end{cases}.$$

La matrice associata a questo sistema si riduce facilmente a gradini, ottenendo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a+2) & a+2 \end{pmatrix}.$$

Se $a \neq 0$ e $a \neq -2$ il sistema è risolubile, quindi il vettore richiesto appartiene all'immagine (il sistema ammette un'unica soluzione). Lo stesso avviene nel caso $a = -2$ (in questo caso il sistema ammette infinite soluzioni). Se $a = -2$ il sistema non ha soluzione, e quindi questo è l'unico caso in cui il vettore richiesto non appartiene all'immagine. Infine, guardando la matrice incompleta del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a+2) \end{pmatrix}$$

si nota immediatamente che se $a \neq 0$ e $a \neq -2$ il determinante della matrice è non nullo, quindi la matrice ha rango massimo: segue che l'immagine ha dimensione 4, generata dalla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ad esempio, mentre il nucleo ha dimensione 0; se $a = 0$ oppure $a = -2$ il rango della matrice incompleta del sistema è 3, e da questo segue che la dimensione dell'immagine è 3, generata dalle prime tre colonne della matrice incompleta, mentre il nucleo ha dimensione 1. Un facile calcolo mostra infine che il nucleo è generato dal vettore $(0,0,0,1)$. □

Esercizio 5 (5 punti)**.** Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1,0,1,0)$ e $v_2 = (1,-1,1,0)$.

(1) Determinare un sistema che abbia U come soluzione.
(2) Determinare una base di $U^\perp$, ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
(3) Determinare una base ortonormale di U.
(4) Determinare la proiezione ortogonale di del vettore $(1,1,1,1)$ su U.

Svolgimento. Un sistema per U è

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(per ottenerlo, basta sostituire le coordinate dei due vettori della base di U nell'equazione generica $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$). Una base di $U^\perp$ è formata dai vettori $(1,0,-1,0)$ e $(0,0,0,1)$: per ottenerla, basta impostare il sistema $v_1 \cdot v = 0$ e $v_2 \cdot v = 0$, dove $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ è un generico vettore, e $\cdot$ indica il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gramm-Schmidt, si ottiene facilmente una base ortonormale di U, ad esempio $\{(0,1,0,0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)\}$. Tramite la formula della proiezione ortogonali si giunge infine a calcolare la proiezione del vettore richiesto come:

$$\left((1,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0) + \left((1,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) (0,1,0,0) = (1,1,1,0).$$

□

Esercizio 6 (5 punti)**.** Consideriamo la retta r di $\mathbb{R}^3$ data dalle equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e la retta s passante per il punto $(1,0,0)$ e parallela al vettore $(1,1,1)$.

(1) Dopo aver verificato che r ed s sono sghembe, trovare la retta di minima distanza tra r ed s, ed i punti di minima distanza.
(2) Indichiamo con t la retta di minima distanza tra r ed s determinata al punto precedente; indichiamo inoltre con P e Q i punti di minima distanza che appartengono a r e s, rispettivamente (quindi $P = t \cap r$ e $Q = t \cap s$). Indichiamo con π il piano contenente r e t. Determinare tutti i punti di π equidistanti da P e Q.

Svolgimento. Le equazioni cartesiane di s sono

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

ed il sistema

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ x - y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

non ha soluzione, quindi le due rette non si intersecano. Inoltre, il sottospazio direttore di r è generato dal vettore $(1,-2,1)$ (che si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad r), quindi le due rette non sono parallele. Dunque, le due rette sono sghembe. Un punto generico di r è della forma $P = (1+t, -1-2t, 1+t)$ mentre un punto generico di

s è della forma $Q = (1+q, q, q)$. Il vettore $P - Q$ è dunque $(t-q, -1-2t-q, 1+t-q)$. Imponendo che questo vettore sia ortogonale al sottospazio direttore di r ed al sottospazio direttore di s, otteniamo i punti $P = (1/2, 0, 1/2)$ e $Q = (1, 0, 0)$, che sono i punti di minima distanza. La retta di minima distanza risulta $t : (1, 0, 0) + \langle(1, 0, -1)\rangle$. Il piano per r e t è quindi $(1/2, 0, 1/2) + \langle(1, -2, 1), (1, 0, -1)\rangle$, la cui equazione cartesiana è $x + y + z = 1$ (non richiesta). L'insieme dei punti equidistanti da P e Q risulta essere l'asse del segmento PQ, contenuto in π: essa è dunque la retta $(3/4, 0, 1/2) + \langle(1, -2, 1)\rangle$. Per convincersene, basta notare che il vettore direttore di tale retta deve essere perpendicolare al vettore $P - Q$ e contenuto nel piano π, e che la direzione della retta r ha esattamente queste proprietà. $\square$

Esercizio 7 (5 punti, Versione A, vedere libro per la soluzione)**.** Siano U e V due sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base del sottospazio $W = U \cap V$ di $\mathbb{R}^n$. Si completi $\mathcal{B}_W$ ad una base $\mathcal{B}_U = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_r\}$ di V e ad una base $\mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_s\}$ di W. Si dimostri che l'insieme

$$\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_r, v_1 \dots, v_s\}$$

è una base di $U + V$.

Esercizio 8 (5 punti Versione B, vedere libro per la soluzione)**.** Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali su un campo K, entrambi di dimensione finita. Fissiamo una base $\{v_1, \dots, v_r\}$ del nucleo $\ker(\phi)$ di ϕ, e completiamola ad una base $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ di V. Dimostrare che i vettori $\{\phi(v_{r+1}), \dots, \phi(v_n)\}$ costituiscono una base dell'immagine $\mathrm{im}(\phi)$ di ϕ.