FALG
16 GIUGNO 2017

M. LONGO

Ogni esercizio vale 6 punti. 2h e 15 minuti di tempo.

Esercizio 1. Sia f_a l'endomorfismo rappresentato rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -1+2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Posto $a = 2$, discutere la diagonalizzabilità di A_2 e determinare una base di tutti gli autospazi.

(b) Discutere al variare di a la diagonalizzabilità di A_a.

Svolgimento. Se $a = 2$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(X) = -X(1-X)(2-X)$; la matrice è quindi diagonalizzabile e gli autospazi relativi agli autovettori 0, 1 e 2 sono tutti di dimensione 1, generati dai vettori $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ e $(3,1,2)$ rispettivamente. In generale, il polinomio caratteristico risulta $-X(1-X)(a-X)$, quindi se $a \neq 1$ e $a \neq 0$ l'endomorfismo è diagonalizzabile. Se $a = 0$ il polinomio caratteristico è $X^2(1-X)$ e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione 2; poiché

$$\begin{pmatrix} A_0 = 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1, l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione 2, quindi A_0 è diagonalizzabile. Se infine $a = 1$, il polinomio caratteristico è $-X(1-X)^2$ e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2; poiché

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 1, quindi A_1 non è diagonalizzabile. $\square$

Esercizio 2. Sia Σ_a, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_3 + (a^2 - a + 2)x_4 = a + 1 \end{cases}$$

Discutere la risolubilità del sistema, determinarne la soluzione e scriverla nella forma $X_0 + W$ con X_0 una soluzione del sistema e W uno spazio vettoriale.

Svolgimento. Tramite il metodo di riduzione a scalini, la matrice completa del sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a & a \end{pmatrix}.$$

Se $a^2 - a \neq 0$, allora la matrice incompleta del sistema ha rango 4 e quindi esiste un'unica soluzione, che determino ricorsivamente:

$$\mathrm{Sol}(\Sigma_a) = \left(\frac{2a-3}{2(a-1)}, \frac{2a-3}{a-1}, \frac{-1}{2(a-1)}, \frac{1}{a-1} \right), \qquad a(a-1) \neq 0.$$

Se $a = 0$ allora il rango della matrice completa ed incompleta del sistema è 3, quindi il sistema ammette una soluzione del tipo $X_0 + W$ con X_0 soluzione particolare e $\dim(W) = 1$, W soluzione del sistema omogeneo associato. Un semplice calcolo mostra che in questo caso

$$\mathrm{Sol}(\Sigma_0) = (0, 0, -1, 2) + \langle (1, 2, 1, -2) \rangle.$$

Se infine $a = 1$, il rango della matrice incompleta è 3 mentre il rango della matrice completa è 4, quindi il sistema non ha soluzioni. $\square$

Esercizio 3. Nello spazio affine standard con coordinate (x, y, z), consideriamo la retta r passante per il punto $(1, 0, 1)$ e parallela al vettore $(1, 1, 0)$ e la retta s di equazione cartesiana

$$s : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

(a) Dopo aver verificato che r ed s sono sghembe, determinare la loro distanza e i punti che realizzano la minima distanza.
(b) Sia π il piano che contiene r ed è parallelo al vettore $(1, 0, 1)$. Trovare la proiezione ortogonale di s su π.

Svolgimento. Le equazioni cartesiane di r sono s

$$r : \begin{cases} x - y = 1 // z = 1 \end{cases}$$

e quelle parametriche di s sono $s : (0, 1, 0) + \langle (1, -2, 1) \rangle$. Mettendo a sistema le equazioni cartesiane di r ed s si ottiene un sistema che non ha soluzione, quindi $r \cap s = \emptyset$. Poichè r

ed s non sono parallele, esse risultano sghembe. Un punto generico di r è $X = (1+\lambda, \lambda, 1)$ mentre un punto generico di s è $Y = (\mu, 1-2\mu, \mu)$. Risulta

$$X - Y = (1 + \lambda - \mu, \lambda - 1 + 2\mu, 1 - \mu).$$

Imponendo che $X - Y$ sia ortogonale sia allo spazio direttore di r che a quello di s, ottengo le equazioni

$$\begin{cases} (X-Y)\cdot(1,1,0) = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda - \mu + \lambda - 1 + 2\mu = 0 \\ (X-Y)\cdot(1,-2,1) = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda - \mu - 2(\lambda - 1 + 2\mu) + 1 - \mu = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\lambda = -4/11$ e $\mu = 8/11$. Ottengo quindi i due punti di minima distanza $P = (7/11, -4/11, 1)$ e $Q = (8/11, -5/11, 8/11)$ e quindi la distanza risulta la norma del vettore $X - Y = (-1/11, 1/11, 3/11)$, $1/\sqrt{11}$.

Il piano π è $(1,0,1) + \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle$, di equazione cartesiana $x - y - z = 0$. Intersecando $\pi \cap s$ ottengo il punto $(1/2, 0, 1/2)$. Il generatore del sottospazio ortogonale al sottospazio direttore di r è $(1,-1,-1)$ e la proiezione ortogonale del sottospazio direttore di s su questo spazio vettoriale vale $(2/3, -2/3, -2/3)$. Da questo segue che la proiezione ortogonale del generatore del sottospazio direttore di s sul sottospazio direttore di π è $(1,-2,1) - (2/3,-2/3,-2/3) = (1/3,-4/3,5/3)$; la retta cercata è quindi $(1/2,0,1/2) + \langle (1,-4,5) \rangle$. □

Esercizio 4. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generatore dai vettori $w_1 = (1,1,-1,-1)$ e $w_2 = (1,0,0,1)$. Determinare una base di $V \cap W$ e completarla ad una base di $V + W$.

Svolgimento. Una base di V è data dai vettori $(1,1,2,0)$ e $(0,0,-1,1)$; impostando il sistema

$$x_1(1,1,2,0) + x_2(0,0,-1,1) = x_3(1,1,-1,-1) + x_4(1,0,0,1)$$

ottengo la soluzione $(1,-,1,1,0)$, che corrisponde al vettore $(1,1,-1,-1)$. Quindi

$$U \cap V = \langle (1,1,-1,-1) \rangle.$$

Quindi $V + U$ ha dimensione 3, ed una base (completando una base di $U \cap V$) risulta formata dai vettori $(1,1,-1,-1)$, $(1,0,0,1)$, $(0,0,-1,1)$. □

Eserczio 5. Uno dei seguenti esercizi:

(1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di V.
   (a) Dire cosa significa che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
   (b) Sia W un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Dimostrare che se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots, v_n$ lo sono.

(2) Sia $f : V \to W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali.
   (a) Dare la definizione di nucleo di f, indicato con $\ker(f)$.

   (b) Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori linearmente indipendenti di V. Dimostrare che se $\ker(f) = 0$ (spazio vettoriale nullo), allora $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono ancora linearmente indipendenti.

(3) Sia $V = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard.
   (a) Dire cosa significa che due vettori v e w di V sono ortogonali.
   (b) Dimostrare che se due vettori v e w di V sono tra loro ortogonali, allora sono anche linearmente indipendenti.

(4) Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione finita.
   (a) Dare la definizione di autovalore e autovettore per ϕ.
   (b) Siano v e w due autovettori relativi a due autovalori distinti λ e μ. Dimostrare che v e w sono linearmente indipendenti.