FALG
7 LUGLIO 2017

M. LONGO

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, considerare il seguente sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + (a-2)x_3 = a^2 - a - 1 \end{cases} .$$

(a) Discutere la risolubilità del sistema Σ_a al variare del parametro a.
(b) Per tutti i valori per i quali il sistema Σ_a è risolubile, trovarne la soluzione e scriverla nella forma $X + W$ dove X è una soluzione particolare del sistema e W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alle basi canoniche dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & a-2 & -1 \\ -a+2 & 2a-2 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Posto $a = 2$, discutere la diagonalizzabilità di f_2 e trovare le basi di ciascun autospazio.
(b) Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità di f_a.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo standard di dimensione 3, considerare le due rette

$$r : (1,0,0) + \langle(1,1,1)\rangle; \qquad s : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} .$$

(a) Trovare le equazioni cartesiane del piano π contenente r e parallelo ad s.
(b) Trovare la distanza tra π ed s.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al massimo due. Sia $\mathcal{B} = \{1 + X, X, 1 + X^2\}$

(a) Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di V.
(b) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_a : V \to V$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f_a(1 + X) = 1 + X + X^2; \quad f_a(X) = 1 + X;$$
$$f_a(1 + X^2) = 2 + 2X + X^2; \quad f_a(1 + 2X) = 2 + 2X + aX^2.$$

Per tali valori di a, scrivere la matrice di f_a rispetto alla base $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ di V e calcolare il nucleo e l'immagine di f_a.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo.

(a) Dare la definizione di *autospazio* di f relativo all'autovalore λ, e la definizione di *polinomio caratteristico* di f.

(b) Dimostrare che se $P(X)$ è il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $f : V \to V$ e $P(\lambda) = 0$, allora l'autospazio V_λ relativo all'autovalore λ ha dimensione almeno 1. Per la dimostrazione, utilizzare il teorema di Rouchè-Capelli ed il fatto che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.