

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
18 LUGLIO 2016

MATTEO LONGO

Esercizio 1 (5 pts). Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si definisca l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A_a := \begin{pmatrix} a & 0 & -a+1 \\ a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

- (1) Trovare tutti i valori di a per i quali il vettore $(1, -1, 1)$ è un autovettore di f_a .
- (2) Discutere la diagonalizzabilità di A_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per la prima domanda, basta considerare il sistema

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -a+1 \\ a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che ha come unica soluzione $\lambda = 1$ e $a = -1$. Quindi i valore di a per cui il vettore dato è un autovettore è $a = -1$ (ed in questo caso l'autovalore corrispondente è 1, ma questo non era richiesto).

Per la seconda domanda, un facile calcolo mostra che il polinomio caratteristico è

$$P_a(X) = (X-1)(X-a)(X+a).$$

Se $a \neq 0, 1, -1$, i tre numeri $1, -1, a$ sono distinti, e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile. Analizziamo separatamente i casi restanti, Se $a = 0$, allora il polinomio caratteristico è

$$P_a(X) = X^2(X-1)$$

e l'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se il rango della matrice A_0 è 1 (la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è infatti 2 se e solo se il rango della matrice $A_0 - 0 = A_0$ è 1). Se $a = 0$ ho

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi A_0 non è diagonalizzabile. Se $a = 1$, il polinomio caratteristico è $P_1(X) = (X+1)(X-1)^2$, quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se il rango di $A_1 - 1$ è 1. Se $a = 1$ ho

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1, quindi A_1 è diagonalizzabile. Allo stesso modo, se $a = -1$, il polinomio caratteristico è $P_{-1}(X) = (X-1)^2(X+1)$, quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se il rango di $A_{-1} - 1$ è 1. Se $a = -1$ ho

$$A_{-1} - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1, quindi A_{-1} è diagonalizzabile. □

Esercizio 2 (5 pts). Al variare del parametro a , si consideri il sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + (a-2)x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + (a^2 + a - 1)x_4 = a \end{cases}$$

Discutere la risolubilità di Σ_a e trovarne tutte le soluzioni.

Svolgimento. Dopo aver applicato la riduzione a scalini, la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a+1) & a \end{pmatrix}$$

quindi se $a \neq 0$ e $a \neq -1$ il sistema ammette un'unica soluzione, che trovo ricorsivamente e vale $(1/2(a+1), -1/2(a+1), 0, 1/(a+1))$. Se $a = 0$ la matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il sistema ammette soluzione; il sistema è omogeneo e, per sostituzione (confrontando i ranghi della matrice incompleta) ottengo che la soluzione è il sottospazio

$$\langle (1, 0, -1, 0), (-1, 1, 0, -2) \rangle.$$

Se $a = -1$ la matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4, mentre quella incompleta è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, quindi il sistema non ammette soluzione. □

Esercizio 3 (5 pts). Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- (1) Trovare una base di $U^\perp$, ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
- (2) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $(0, 1, -1, 0)$ su U .

Svolgimento. Una base di U si ricava facilmente (ad esempio tramite sostituzione nel sistema), ed è $\{(1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, -1)\}$. Imponendo le condizioni di ortogonalità di un vettore

(x_1, x_2, x_3, x_4) ai due generatori di U ottengo il sistema di equazioni che descrive $U^\perp$, che è

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

ed ancora per sostituzione ottengo una base di $U^\perp$ data dai vettori $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0)\}$.

Una base ortonormale di U si ricava facilmente (ad esempio usando Gram-Schmidt) ed è $\{(1/2, 1/2, -1/2, -1/2), (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$. Applicando la formula della proiezione ottengo la proiezione ortogonale su U del vettore $(0, 1, -1, 0)$:

$$\begin{aligned} & \left((0, 1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) \cdot (1/2, 1/2, -1/2, -1/2) + \\ & + \left((0, 1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \cdot (0, 0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \\ & = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2) + (0, 0, -1/2, 1/2) = (1/2, 1/2, -1, 0). \end{aligned}$$

□

Esercizio 4 (5 pti). Sia r_1 la retta passante per il punto $(-1, 1, 0)$ e parallela al vettore $(1, 1, -2)$ e sia r_2 la retta di equazione cartesiana:

$$r_2 = \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

- (1) Dopo aver verificato che r_1 ed r_2 sono sghembe, trovare la retta di minima distanza ed i punti di minima distanza tra r_1 ed r_2 .
- (2) Si denoti con s la retta di minima distanza determinata al punto precedente. Trovare la retta t passante per $(0, 0, 0)$, perpendicolare a s e complanare ad essa.

Svolgimento. Le equazioni cartesiane di r_1 sono

$$r_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

mentre r_2 passa per il punto $(1, 1, 1)$ ed è parallela al vettore $(1, -1, 0)$. Quindi r_1 ed r_2 non sono parallele, e la loro intersezione è data dal sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione. Quindi le due rette sono sghembe. Per determinare la retta di minima distanza, considero il sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ad entrambi i sottospazi direttori di r_1 ed r_2 : imponendo le condizioni di ortogonalità ottengo un generatore di U , il vettore $v = (1, 1, 1)$. Considero quindi i due piani π_1 e π_2 determinati in questo modo: π_1 contiene r_1 ed è parallelo al vettore v , e π_2 contiene r_2 ed è parallelo al vettore v . La retta di minima distanza s si ottiene quindi come intersezione $s = \pi_1 \cap \pi_2$. Determino quindi questi due piani: π_1 è il piano $(-1, 1, 0) + \langle (1, 1, -2), (1, 1, 1) \rangle$, di equazione

$$\pi_1 : x - y + 2 = 0$$

ed il piano π_2 è il piano $(1, 1, 1) + \langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$ di equazione cartesiana

$$\pi_2 : x + y - 2z = 0.$$

Quindi

$$s : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Determino quindi i punti di minima distanza tramite intersezione con le rette r_1 ed r_2 , ottenendo

$$Q_1 = (-1, 1, 0) = s \cap r_1 = \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$Q_2 = (0, 2, 1) = s \cap r_2 = \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Per trovare la retta t , noto che il fascio di piani perpendicolari ad s è $\mathcal{F}_a : x + y + z = a$, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ (infatti s è parallela al vettore $(1, 1, 1)$). Il piano che passa per $(0, 0, 0)$ e perpendicolare ad s è dunque $\pi : x + y + z = 0$. La retta cercata, essendo complanare ad s , perpendicolare ad essa e passante per $(0, 0, 0)$, appartiene al piano π e passa per il punto $(0, 0, 0)$ e per il punto

$$P = \pi \cap s = \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} = (-1, 10).$$

Quindi t ha equazione parametrica $(0, 0, 0) + \langle (1, -1, 0) \rangle$. Segue che t ha equazione cartesiana:

$$t : \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

□

Esercizio 5 (5 pti). Siano $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ e $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ quattro vettori di $\mathbb{R}^4$.

- (1) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e trovare le coordinate del vettore $(2, 2, 1, 0)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- (2) Definiamo un'applicazione lineare $\varphi_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi_a(v_1) = v_1; \quad \varphi_a(v_2) = v_2; \quad \varphi_a(v_3) = v_2 + av_3; \quad \varphi_a(v_4) = (a^2 - a)v_4.$$

Trovare la matrice di φ_a rispetto alla base $\mathcal{B}$ e determinare, se esistono, i valori di a per i quali la dimensione dell'immagine di φ_a e del nucleo di φ_a coincidono.

Svolgimento. Si mostra facilmente che $\mathcal{B}$ è una base, ad esempio notando che il determinante della matrice formata dai quattro vettori non è nullo. Inoltre, indicando con e_1, e_2, e_3, e_4 i

quattro vettori della base canonica, si mostra facilmente che $e_1 = -v_2 + v_3 + v_4$, $e_2 = v_2 - v_4$, $e_3 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$ e $e_4 = v_4$. La matrice di cambio i base risulta quindi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di φ_a rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a \end{pmatrix}.$$

La dimensione dell'immagine e del nucleo di φ_a sono uguali se e solo se una delle due (e quindi entrambe), è uguale a 2, per la formula che lega la dimensione di uno spazio vettoriale, 4 in questo caso, alle dimensioni di nucleo ed immagine. Questo avviene se e solo se il rango della matrice A_a è 2, e questo avviene se e solo se $a = 0$. Infine, per sostituzione, ottengo facilmente i valori di $\varphi_a(e_i)$. $\square$

Esercizio 6 (2 pti). Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $X^4 + X^2 + 1 = 0$.

Soluzione. Posto $y = T^2$, le soluzioni dell'equazione $T^2 + T + 1 = 0$ sono $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, quindi $\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ e $\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)$. Estraendo le radici quadrate (ad esempio utilizzando la formula di de Moivre, per la quale le radici di $\cos\theta + i\sin\theta$ sono $\cos(\theta/2 + k\pi) + i\sin(\theta/2 + k\pi)$ per $k = 0, 1$) ottengo quattro soluzioni:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3), & z_2 &= \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3), \\ z_3 &= \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3), & z_4 &= \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3). \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 7 (3 pti). Ogni versione contiene una delle seguenti domande; per la soluzione, vedere il libro di testo.

- (1) Dimostrare la seguente affermazione: se $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono m vettori di uno spazio vettoriale V linearmente indipendenti ed $f : V \rightarrow W$ è una funzione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali V e W , allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono ancora vettori linearmente indipendenti.
- (2) Dopo aver ricordato le definizioni di *funzione iniettiva* tra due insiemi e *nucleo* di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali, dimostrare la seguente affermazione: una funzione lineare $f : V \rightarrow W$ tra due spazi vettoriali è iniettiva se, e solo se, il suo nucleo è il sottospazio nullo.
- (3) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W , e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Dopo aver ricordato la definizione di funzione *suriettiva* tra due insiemi, dimostrare la seguente affermazione: f è suriettiva se, e solo se, $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di W .
- (4) Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ vettori di uno spazio vettoriale V ed $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali V e W . Dimostrare la seguente affermazione: se $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono vettori linearmente indipendenti, allora anche $\{v_1, \dots, v_m\}$ lo sono.