

INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
FALG

MATTEO LONGO

Ogni esercizio vale 6 punti. Tempo: 2 ore e 15 minuti.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo, con $n \geq 1$ un numero naturale. Supponiamo che f abbia un autovalore uguale a 0.

- (a) E' vero o falso che f è un isomorfismo? Fornire una dimostrazione o un controesempio.
- (b) E' vero o falso che f è diagonalizzabile? Fornire una dimostrazione o un controesempio.

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ considerare il sistema

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + a(a+1)x_3 = a+1 \end{cases}$$

- (a) Discutere al variare di a la risolubilità del sistema.
- (b) Per tutti i valori di a per i quali il sistema è risolubile, trovare la soluzione ed esprimerla nella forma $S_0 + W$ dove S_0 è una soluzione particolare del sistema e W è uno spazio vettoriale.

Esercizio 3. Sia $f_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Si dica per quali valori di a l'endomorfismo è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori determinare una base ortonormale di autovettori.

Esercizio 4. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 1, -1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Trovare un sistema di equazioni $AX = 0$ con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ che abbia come soluzione il sottospazio W .

- (b) Trovare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$.

Esercizio 5. Nello spazio affine standard di dimensione 3, considerare le seguenti due rette:

$$r : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s : (-1, -1, 0) + \langle (0, 2, -1) \rangle,$$

- (a) Dopo aver stabilito la posizione reciproca di r ed s , determinare la loro distanza.
(b) Determinare, se possibile, una retta incidente sia r che s e passante per il punto $O = (0, 0, 0)$.