FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
19 GIUGNO 2014
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
INGEGNERIA DEI PROCESSI INDUSTRIALI E DEI MATERIALI

1. Teoria

Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate, fornendo una dimostrazione o un controesempio. Risposte incomplete non saranno prese in considerazione.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ di dimensione 3. Supponiamo che v_1, v_2 e v_3 siano 3 vettori di V tali che la dimensione di ciascuno di ciascuno dei tre sottospazi vettoriali $\langle v_1, v_2\rangle$, $\langle v_1, v_3\rangle$ e $\langle v_2, v_2\rangle$ sia 2. Si dica che è vero o falso che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V e supponiamo che $(f \circ f)(v) = v$ per ogni $v \in V$ (o, più brevemente, f^2 è l'identità). Si dimostri che se λ è un autovalore di V, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.

Esercizio 3. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo K. Definire le nozioni di *autovalore* e di *polinomio caratteristico* di f. Si dimostri che λ è un autovalore di f se se solo se è una radice del polinomio caratteristico (ovvero una soluzione dell'equazione $P(X) = 0$, dove $P(X)$ indica il polinomio caratteristico di f).

Esercizio 4. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo K. Siano v e w due autovettori, relativi a due autovalori λ e μ. Discutere ciascuna delle seguenti implicazioni:

(a) Se $\lambda \neq \mu$ allora $\dim\langle v, w\rangle = 2$.
(b) Se $\dim\langle v, w\rangle = 2$ allora $\lambda \neq \mu$.

Esercizio 5. Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, dove W è uno spazio vettoriale di dimensione finita. Dimostrare che se $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sono vettori linearmente indipendenti, allora anche $v_1, \dots, v_m$ lo sono.

Esercizio 6. Si dica quando due rette in dello spazio affine tridimensionale standard $\mathbb{A}^3_K$ sul campo K si dicono *sghembe*. Si dimostri, utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, che se due rette r ed s non sono contenute in uno stesso piano π (ovvero, non sono complanari) allora sono necessariamente sghembe.

Esercizio 7. Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita V su un campo K. Sia w un vettore di V. E' vero i falso che i vettori $w, v_1, \dots, v_m$ sono ancora linearmente indipendenti se e solo se w non appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$ generato dai vettori $v_1, \dots, v_m$?

Esercizio 8. Definire il concetto di *indipendenza lineare* per un insieme finito di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ non sono linearmente indipendenti, allora almeno uno dei vettori $v_1, \dots, v_m$ può essere espresso come combinazione lineare degli altri;
- Se $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti, allora ogni vettore
$$v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$
può essere espresso in modo unico come combinazione lineare dei $v_1, \dots, v_m$.

Esercizio 9. Definire il nucleo $\ker(f)$ e l'immagine $\mathrm{im}(f)$ di un endomorfismo $f : V \to V$, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo K, e dimostrare che sono sottospazi di V. Discutere le seguenti affermazioni:

(a) Lo spazio vettoriale V ha dimensione 5 ed esiste un endomorfismo f tale che $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
(b) $f \circ f = 0$ se e solo se $\ker(f) \supseteq \mathrm{Im}(f)$.

2. Esercizi

Esercizio 1. Sia S il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:
$$S := \{(1, -1, 1, 0), (-1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$
Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione
$$f_a : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
definita dalle condizioni seguenti:
$$f(1, -1, 1, 0) = (1, -1, a^2 - 2a, -a); \qquad f(-1, 1, 1, 0) = (-1, 1, a^2 - 2a, -a);$$
$$f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, -(a-1)^2, a); \qquad f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, a, a^2).$$

(a) Dimostrare che esiste un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che coincide con f_a sui 4 vettori dell'insieme S. Si continui ad indicare con f_a tale endomorfismo.
(b) Scrivere la matrice che rappresenta f_a rispetto alla base canonica
$$\mathcal{C} := \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0,), (0, 0, 0, 1)\}$$
di $\mathbb{R}^4$.
(c) Trovare tutti i valori di a per i quali f_a non è iniettiva. Per ciascuno di tali valori, si determini la dimensione del nucleo f_a di f.
(d) Per ciascuno dei valori di a determinati al punto precedente, si dica se f_a è diagonalizzabile.
(e) Per ciascuno dei valori di a per i quali f_a risulta diagonalizzabile, si determini una base di autovalori, una matrice diagonale D ed una matrice H tali che $A_a = HDH^{-1}$.

Soluzione. Per il punto (a) basta verificare che i vettori $(1, -1, 1, 0)$, $(-1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, e per questo è sufficiente verificare che il sistema
$$x(1, -1, 1, 0) + y(-1, 1, 1, 0) + z(1, 0, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$
di quattro equazioni in quattro incognite ha solo la soluzione $(0, 0, 0, 0)$ (verifica immediata). Per il secondo punto, osservo che
$$(1, -1, 1, 0) + (-1, 1, 1, 0) = (0, 0, 2, 0)$$
quindi
$$f_a(0, 0, 2, 0) = f\left((1, -1, 1, 0) + (-1, 1, 1, 0)\right) = f(1, -1, 1, 0) + f(-1, 1, 1, 0) =$$

$$= (1,-1,a^2-2a,-a)+(-1,1,a^2-2a,-a) = (0,0,2a^2-4a,-2a)$$

da cui segue $f_a(0,0,1,0) = (0,0,a^2-2a,-a)$. Infine, noto che

$$(0,1,0,0) = (-1,1,1,0)+(1,0,0,0)-(0,0,1,0)$$

da cui, come prima, ottengo

$$f_a(0,1,0,0) = (-1,1,a^2-2a,-a)+(1,0,-(a-1)^2,a)-(0,0,a^2-2a,-a) =$$

$$= (0,1,-(a-1)^2,a).)$$

La matrice A_a associata a f_a diventa quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(a-1)^2 & -(a-1)^2 & a^2-2a & a \\ a & a & -a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Per il punto (c), calcolando il determinante della matrice A_a ottengo il valore

$$\det(A_a) = a^2(a^2-2a)+a^2 = a^2(a^2-2a+1) = a^2(a-1)^2.$$

Dunque, i soli valori per i quali f_a non è iniettiva sono $a=1$ e $a=0$. La dimensione di $\ker(f_0)$ e $\ker(f_1)$ è uguale al numero di incognite, 4, meno il rango della matrice A_0 e A_1, rispettivamente. Le matrici in questione sono:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Segue $\dim(\ker(f_0)) = 2$ e $\dim(\ker(f_1)) = 1$.

Studio ora la diagonalizzabilità di f_0 e f_1. Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = t^2(t-1)^2.$$

Già sappiamo che la dimensione del nucleo di A_0 è 2. Dobbiamo solo studiare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1. La matrice $A_0 - 1$ è

$$A_0 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Segue che la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è 4-2=2. Dunque, le molteplicità algebriche e geometriche coincidono e A_0 è diagonalizzabile.

Considero A_1. Il suo polinomio caratteristico è

$$\det\begin{pmatrix}1-t & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-t & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1-t & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1-t\end{pmatrix} = (1-t)^2(-1+t^2+1) = t^2(t-1)^2.$$

Abbiamo già stabilito che la dimensione del nucleo di f_1 è 1, quindi la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 0 non coincidono. Pertanto, f_1 non è diagonalizzabile.

Determiniamo ora una base di autovettori dei due autospazi $V_0 = \ker(f_0)$ e $V_1 = \ker(f_0 - \mathrm{id})$. Per V_0, è necessario risolvere il sistema $A_0X = 0$ con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

quindi una base di V_0 è $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Per V_1, devo risolvere il sistema $A_0X = X$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -x_1 - x_2 = x_3 \\ 0 = x_4 \end{cases}$$

quindi una base di V_1 è $\{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\}$. Le matrici richieste sono quindi

$$D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

e

$$H = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\square$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine tridimensionale standard sui numeri reali, dotato del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Sia r la retta passante per il punto $P = (1,1,0)$ ed il cui sottospazio direttore sia generato dal vettore $(1,0,1)$. Sia inoltre π il piano contenente r e parallelo al vettore $(0,1,1)$.

(a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r e del piano π.
(b) Dopo aver verificato che il punto $Q = (2,2,0)$ non appartiene a π, determinare la proiezione ortogonale su π del punto Q.
(c) Determinare le coordinate di tutti i quadrati contenuti in π e di lato PS, dove S è il punto $(2,1,1)$.
(d) Determinare la retta s incidente r, ad essa ortogonle e passante per il punto $R = (1,2,3)$.

Soluzione. Il sottospazio generato da $(1,0,1)$ è soluzione del sistema omogeneo (nella variabili x, y, z):

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

dunque, sostituendo le coordinate del punto $P = (1,1,0)$ ottengo

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Il fascio (proprio) di piani per r è

$$\pi_{a,b} : a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$$

e quello parallelo al vettore $(0,1,1)$ può essere determinato richiedendo che il sistema omogeneo

$$ax + by - az = 0$$

abbia come soluzione $(0,1,1)$, ovvero $b - a = 0$, quindi $a = b$. Il piano cercato è allora

$$\pi : x + y - z - 2 = 0.$$

Visto che $2 + 2 - 2 \neq 0$, il punto Q non appartiene a π. La retta perpendicolare a π ha direzione $(1,1,-1)$, quindi la perpendicolare a π passante per Q ha equazione parametrica $(2,2,0) + \langle(1,1,-1)\rangle$. Il punto generico di tale retta ha coordinate $(2 + s, 2 + s, -s)$. Imponendo che questo punto appartenga al piano π si ottiene l'equazione

$$2 + s + 2 + s - (-s) - 2 = 0$$

e risulta $s = -2/3$. La proiezione ortogonale richiesta è allora, sostituendo questo valore, il punto $(4/3, 4/3, 2/3)$.

Noto che il punto S di coordinate $(2,1,1)$ appartiene al piano π (notare che $2 + 1 - 1 - 2 = 0$). La retta per S e P ha equazioni parametriche

$$(1,1,0) + \langle(2,1,1) - (1,1,0)\rangle = (1,1,0) + \langle(1,0,1)\rangle.$$

Il modulo del vettore $P - S = (1,0,1)$ è $\sqrt{2}$, che quindi è la lunghezza del lato del quadrato cercato. Per determinare il quadrato, devo trovare la direzione ortogonale alla retta per P ed S e contenuta nel piano π. Un vettore generico del piano π è $a(1,0,1) + b(0,1,1) = (a, b, a + b)$. Imponendo che questo vettore sia ortogonale alla direzione della retta per P ed S ottengo l'equazione

$$(a, b, a + b) \cdot (1,0,1) = 2a + b = 0$$

ovvero $b = -2a$. Sostituendo, ottengo che la direzione ortogonale alla retta per P ed S, contenuta in π, è data da $v = (1,-2,-1)$. Notiamo che questo vettore ha norma $\sqrt{6}$, quindi i vertici del quadrato cercato sono dati dai quattro punti $P, S, P + w, S + w$ e dai quattro punti $P, S, P - w, S - w$ con $w = (\sqrt{2}/\sqrt{6})v$.

La retta cercata deve essere contenuta nel fascio (improprio) di piani perpendicolari a r. Tali piani sono tutti e soli i piani di equazione

$$\sigma_a : x + z = a$$

(usare che la direzione di r è $(1,0,1)$). Imponendo il passaggio di σ_a per $R = (1,2,3)$ ottengo l'equazione $1 + 3 = a$, ovvero $a = 4$. Il piano cercato è

$$\sigma : x + z = 4.$$

L'intersezione di tale piano con la retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

da cui ottengo il punto $(5/2, 1, 3/2)$. La retta cercata è allora la retta di equazione parametrica

$$(1, 2, 3) + \langle (1, 2, 3) - (5/2, 1, 3/2) \rangle = (1, 2, 3) + \langle (-3, 2, 3) \rangle.$$

□

Esercizio 3. Al variare del parametro reale a, considerare il seguente sistema non omogeneo

$$S_a : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + a^2 x_3 = 1. \end{cases}$$

(a) Al variare del parametro a, discutere la risolubilità del sistema S_a.
(b) In tutti i casi in cui il sistema S_a sia risolubile, determinarne una soluzione.
(c) Sia W_a lo spazio di soluzioni del sistema omogeneo

$$S_a^{\text{omog}} : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases}$$

associato a S_a. In tutti i casi in cui la dimensione di W_a è maggiore di zero, determinare una base ortonormale dello spazio $V = W_a^{\perp}$, ortogonale di W_a rispetto al prodotto scalare standard.
(d) Trovare i vettori w di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V determinato al punto precedente sia il vettore $v = (1, 2, 1)$ e la cui norma sia 3.

Soluzione. Le matrici completa ed incompleta del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

In rango di A è maggiore o uguale a 2, visto che esiste un determinante 2×2 non nullo, ad esempio

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0;$$

il rango di A è 3 se e solo se, quindi, il suo determinante è non nullo. Sviluppando lungo la prima riga, ad esempio, ottengo

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a^2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 - 2 + 1 = a^2 - 1$$

quindi questo determinante è non zero se e solo se $a \neq \pm 1$. Possiamo quindi concludere che se $a \neq \pm 1$, il sistema ha esattamente una soluzione (visto che il rango della matrice completa non può essere maggiore di 3) che possiamo determinare, ad esempio, utilizzando il metodo di Gauss. Con operazione elementari, che indico con $\sim$, ottengo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

da cui risulta

$$z = -\frac{1}{a+1}$$
$$y = a - z = a + \frac{1}{a+1} = \frac{a^2+a+1}{a+1}$$
$$x = -y = -\frac{a^2+a+1}{a+1}.$$

Analizziamo ora i due casi rimanenti. Se $a = 1$, la matrice C risulta

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 (l'ultima colonna è uguale alla terza). Quindi, il sistema ha una varietà di dimensione 1 come soluzioni. Una sua soluzione particolare è il vettore $(1, -1, 2)$, mentre la soluzione del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

è $\langle(1, -1, 1)\rangle$. Dunque, in questo caso le soluzioni sono $(1, -1, 2) + \langle(1, -1, 1)\rangle$.

Per il punto (c), noto che i casi in cui la dimensione del sistema omogeneo associato al sistema S_a è maggiore di zero sono quelli in cui $a = \pm 1$. In questo caso, notare che il sistema omogeneo per $a = 1$ e $a = -1$ è lo stesso e la sua soluzione è il sottospazio $W = \langle(1, -1, 1)\rangle$. Il suo ortogonale si determina facilmente ed è $V = \langle(1, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle$. Una sua base ortonormale si può determinare tramite il metodo di Gramm-Schmitd e vale

$$\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}.$$

Per l'ultimo punto, noto che il vettore w è del tipo

$$w = (1, 2, 1) + (t, -t, t) = (1 + t, 2 - t, 1 + t)$$

visto che l'ortogonale di V è W, per costruzione (usare che l'ortogonale dell'ortogonale di un sottospazio è il sottospazio stesso) al variare di $t \in \mathbb{R}$. Basta quindi risolvere l'equazione (quadratica in t)

$$(1 + t)^2 + (2 - t)^2 + (1 + t)^2 = 3^2 = 9$$

le cui soluzioni sono $t = \pm 1$. Ottengo dunque i due punti $(1 \pm 1, 2 \mp 1, 1 \pm 1)$.

$\square$

Esercizio 4. Indichiamo al solito con $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi e con i l'unità immaginaria. Ricordo che le radici di un poliniomio $P(X)$ sono le soluzioni dell'equazione $P(X) = 0$.

(a) Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 = 5$.

(b) Determinare tutti i possibili polinomi caratteristici di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sapendo che la dimensione del nucleo di f è 1 e che tutte le altre eventuali radici del polinomio caratterstico di f sono contenute nell'insieme dei numeri complessi determinati al punto precedente. In ciascuno di questi casi, dire se abbiamo sufficienti informazioni per stabilire se f è diagonalizzabile; in tutti i casi in cui vi siano abbastanza informazioni, discutere la diagonalizzabilità di f.

Proof. Le radici terze di 5 sono

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt[3]{5}; \\ \zeta_2 &= \sqrt[3]{5}\left(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\right); \\ \zeta_3 &= \sqrt[3]{5}\left(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\right). \end{aligned}$$

Per la seconda parte, ricordo che avere un nucleo di dimensione 1 significa che l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione 1. In particolare, X divide il polinomio caratteristico di f. Ricordo anche che $\zeta_1 \in \mathbb{R}$ mentre $\bar{\zeta}_3 = \zeta_2 \notin \mathbb{R}$. I possibili polinomi caratteristici sono:

(1) $-X^3$: f non è diagonalizzabile, avendo un solo autovalore, 0, di molteplicità geometrica 1 diversa dalla sua molteplicità algebrica, che vale 3.
(2) $-X^2(X-\zeta_1)$: f non è diagonalizzabile, avendo un autovalore, 0, di molteplicità geometrica 1 diversa dalla sua molteplicità algebrica, che vale 2.
(3) $-X(X-\zeta_1)^2$: in questo caso, non abbiamo abbastanza informazioni per discutere la diagonalizzabilità di f, visto che non sappiamo nulla sull'autospazio relativo all'autovalore ζ_1.
(4) $-X(X-\zeta_2)(X-\zeta_3)$: f non è diagonalizzabile, avendo due autovalori non reali; si noti che f, come endomorfismo di $\mathbb{C}^3$, è diagonalizzabile.

□