

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

DOCENTI: CANDILERA, FIOROT, LONGO, MENEGAZZO, NOVELLI

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f: V \rightarrow W$, dimostrare che l'immagine di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad a + ib \mapsto b - ia$$

è lineare? Motivare la risposta.

3. Sia $f: V \rightarrow W$ una funzione lineare e siano $v_1, \dots, v_s$ vettori di V , e poniamo $w_1 = f(v_1), \dots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $w_1, \dots, w_s$ sono linearmente indipendenti, allora $\langle v_1, \dots, v_s \rangle \cap \text{Ker}(f) = \{0_V\}$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(1 + 2i)z^5 = -14 + 7i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Sigma_\alpha: \begin{cases} x_1 - \alpha x_3 = 0 \\ x_1 + (\alpha + 1)x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha^2 + \alpha)x_3 + \alpha x_4 = \alpha \\ x_1 - \alpha x_3 + \alpha x_4 = -1 \end{cases}$$

- (a) Determinare, al variare di α , il rango della matrice incompleta dei coefficienti del sistema lineare associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α .
- (b) Determinare, al variare di α , le soluzioni di Σ_α .
- (c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

- (a) Determinare, al variare di α , una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α , se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

- (b) Determinare, al variare di α , $f_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Per $\alpha = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_1 sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
 $\dim W = 2$, $f_0(W) = \text{Im} f_0$ e $f_{-1}(W) = \text{Im} f_{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 + 13x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

- (a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.
- (c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.
- (d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.
- (e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc.).
- Consegnare il **foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

DOCENTI: CANDILERA, FIOROT, LONGO, MENEGAZZO, NOVELLI

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f: V \rightarrow W$, dimostrare che il nucleo di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad a + ib \mapsto -b + ia$$

è lineare? Motivare la risposta.

3. È data una funzione lineare $f: V \rightarrow W$. Siano $v_1, \dots, v_s$ vettori di V , e poniamo $w_1 = f(v_1), \dots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $\langle w_1, \dots, w_s \rangle = \text{Im}(f)$, allora $V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle + \text{Ker}(f)$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(2i - 1)z^5 = 10 + 5i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Sigma_\alpha: \begin{cases} x_1 + \alpha x_3 = 0 \\ x_1 + (1 - \alpha) x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha) x_3 - \alpha x_4 = -\alpha \\ x_1 + \alpha x_3 - \alpha x_4 = -1 \end{cases}$$

- (a) Determinare, al variare di α , il rango della matrice incompleta dei coefficienti del sistema lineare associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α .
- (b) Determinare, al variare di α , le soluzioni di Σ_α .
- (c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

- (a) Determinare, al variare di α , una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α , se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

- (b) Determinare, al variare di α , $f_{\alpha}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Per $\alpha = -1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_{-1} sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
 $\dim W = 2$, $f_0(W) = \text{Im} f_0$ e $f_1(W) = \text{Im} f_1$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} 13x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \right\}.$$

- (a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.
- (c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.
- (d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.
- (e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

DOCENTI: CANDILERA, FIOROT, LONGO, MENEGAZZO, NOVELLI

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f: V \rightarrow W$, dimostrare che il nucleo di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad a + ib \mapsto (a + ib)^2$$

è lineare? Motivare la risposta.

3. Supponiamo che la funzione lineare $f: V \rightarrow W$ sia suriettiva. Siano $w_1, \dots, w_s$ vettori di W , e scegliamo $v_1, \dots, v_s$ in V tali che $w_1 = f(v_1), \dots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $\langle v_1, \dots, v_s \rangle + \text{Ker}(f) = V$, allora $\langle w_1, \dots, w_s \rangle = W$;

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(1 - 3i)z^5 = 12 + 4i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Sigma_\alpha: \begin{cases} x_1 + 2\alpha x_3 = 0 \\ x_1 + (1 - 2\alpha) x_2 + x_3 = 0 \\ (4\alpha^2 - 2\alpha) x_3 - 2\alpha x_4 = -2\alpha \\ x_1 + 2\alpha x_3 - 2\alpha x_4 = -1 \end{cases}$$

- (a) Determinare, al variare di α , il rango della matrice incompleta associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α .
- (b) Determinare, al variare di α , le soluzioni di Σ_α .
- (c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

- (a) Determinare, al variare di α , una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α , se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

- (b) Determinare, al variare di α , $f_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\alpha & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Per $\alpha = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_1 sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
 $\dim W = 2$, $f_0(W) = \text{Im} f_0$ e $f_{\frac{1}{2}}(W) = \text{Im} f_{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} 2x_1 - 13x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

- (a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.
- (c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.
- (d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.
- (e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare il **foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

DOCENTI: CANDILERA, FIOROT, LONGO, MENEGAZZO, NOVELLI

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f: V \rightarrow W$, dimostrare che l'immagine di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad a + ib \mapsto a^2 + ib^2$$

è lineare? Motivare la risposta.

- 3.

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(3i + 1)z^5 = 18 - 6i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Sigma_\alpha: \begin{cases} x_1 - 2\alpha x_3 = 0 \\ x_1 + (1 + 2\alpha) x_2 + x_3 = 0 \\ (4\alpha^2 + 2\alpha) x_3 + 2\alpha x_4 = 2\alpha \\ x_1 - 2\alpha x_3 + 2\alpha x_4 = -1 \end{cases}$$

- (a) Determinare, al variare di α , il rango della matrice incompleta associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α .
- (b) Determinare, al variare di α , le soluzioni di Σ_α .
- (c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

- (a) Determinare, al variare di α , una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α , se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

- (b) Determinare, al variare di α , $f_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Per $\alpha = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_1 sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
 $\dim W = 2$, $f_0(W) = \text{Im} f_0$ e $f_{-\frac{1}{2}}(W) = \text{Im} f_{-\frac{1}{2}}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

- (a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.
- (c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.
- (d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.
- (e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.