

**FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA INGEGNERIA
CHIMICA E DEI MATERIALI
24 GIUGNO 2015**

MATTEO LONGO

Svolgere entrambe le parti (Teoria ed Esercizi). Si richiede la sufficienza su entrambe le parti.

1. TEORIA

Discutere le seguenti domande. Risposte parziali, incomplete, non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione.

Domanda 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

- (1) Dare la definizione di insieme di vettori linearmente indipendenti di V .
- (2) Dimostrare o trovare un controesempio per la seguente affermazione: se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V , anche l'insieme

$$\{v_1 + 2v_2 - v_3, v_1 - v_2 + v_3, v_1 - 2v_2 - v_3\}$$

è formato da vettori linearmente indipendenti.

- (3) Dimostrare la seguente affermazione: sia $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ il sottospazio generato da un insieme di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \dots, v_m\}$. Un vettore v non appartiene a W se e solo se l'insieme $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ è formato da vettori linearmente indipendenti.

Domanda 2. Sia $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali reali di dimensione finita.

- (1) Definire il nucleo $\ker(f)$ e f e dimostrare che è un sottospazio vettoriale di V .
- (2) Dopo aver ricordato la definizione di funzione iniettiva $\varphi : A \rightarrow B$ tra due insiemi A e B , mostrare che la funzione lineare f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = 0$.
- (3) Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente affermazione: se $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono m vettori di V linearmente indipendenti ed f è iniettiva, allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono ancora linearmente indipendenti.

Domanda 3. Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale sui numeri reali di dimensione finita.

- (1) Come si definiscono gli autovalori di f ?
- (2) Dopo aver definito l'autospazio di f relativo all'autovalore λ , si dimostri che è un sottospazio vettoriale di V .
- (3) Dopo aver definito i concetti di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore λ , dimostrare che la molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore.

Domanda 4. Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale sui numeri reali di dimensione finita.

- (1) Come si definiscono gli autovalori di f ?
- (2) Dopo aver definito l'autospazio V_λ di f relativo all'autovalore λ , dimostrare che se λ_1 e λ_2 sono due autovalori distinti allora $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

- (3) Dopo aver definito il polinomio caratteristico di f , dimostrare che se λ è un autovalore di f allora la dimensione di V_λ è almeno 1.

2. ESERCIZI

Esercizio 1. Dire per quali valori del parametro reale a il seguente sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + ax_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+3)x_4 = 4 \end{cases}$$

ha soluzione. Per tali valori, determinare la soluzione del sistema.

Svolgimento. La matrice completa del sistema è:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & a+3 & 4 \end{pmatrix}$$

che, tramite il metodo di eliminazione di Gauss, diventa

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un semplice calcolo mostra che il determinante della matrice incompleta è $a(a+1)$. Quindi per $a \neq 0$ e $a \neq -1$ esiste una sola soluzione del sistema (Rouché-Capelli) che si può determinare ricorsivamente a partire dall'ultima equazione del sistema rappresentato dalla matrice B_a :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 - x_2 = -x_4 = -1/(a+1) \\ x_2 = 1 \\ z_3 = (1/a)(1 - z_4) = (1/a)(1 - 1/(a+1)) = 1/(a+1) \\ x_4 = 1/(a+1) \end{cases}$$

Se $a = 0$ ottengo la matrice completa

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice incompleta è 3, visto che la prima, la seconda e la quarta colonna sono indipendenti (verifica immediata). L'ultima colonna della matrice completa è linearmente dipendente dalle precedenti (verifica semplice: si ottiene sommando la quarta colonna alla seconda e sottraendo la prima). Quindi il sistema è risolubile (Rouché-Capelli) e la sua soluzione è un sottospazio di dimensione 1 (il rango di B_a è 3). Una soluzione particolare del sistema associato a B_0 è $(-1, 1, 1, 1)$, mentre la soluzione del sistema omogeneo associato è $\langle(0, 0, 1, 0)\rangle$, quindi la soluzione di Σ_0 è la varietà lineare $(-1, 1, 1, 1) + \langle(0, 0, 1, 0)\rangle$.

Se $a = -1$ ottengo la matrice completa

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è 4, visto che i vettori $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ e $(1, 1, 1, 1)$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ (verifica semplice) quindi il sistema Σ_{-1} non ha soluzione (Rouché-Capelli). $\square$

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, 1, 0)$ e $(1, 1, 1, 1)$.

- (1) Trovare un sistema la cui soluzione sia esattamente il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, 1, 0)$ e $(1, 1, 1, 1)$.
- (2) Trovare una base ortonormale di W .
- (3) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dal sistema:

$$U : \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Trovare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$.

Soluzione. Il sistema deve essere omogeneo, visto che ha per soluzione un sottospazio vettoriale. Per Rouché-Capelli, sono sufficienti due equazioni indipendenti (il rango della matrice associata al sistema deve essere 2, pari al numero di incognite (4) meno la dimensione dello spazio di soluzioni (2)). Sostituendo nella generica $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ ottengo

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$$

quindi posso ricavare $c = -a - 2b$ e $d = a + 2b - a - b = b$. Quindi il sistema richiesto si ottiene per scelte di (a, b) che restituiscano due equazioni indipendenti; ad esempio $a = 1, b = 0$ e $a = 0, b = 1$. Sostituendo ottengo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni il sottospazio richiesto.

Per trovare una base ortonormale di W , applico il procedimento di Gramm-Schmidt. La norma di $(1, 2, 1, 0)$ è $\sqrt{6}$, quindi il primo vettore della base ortonormale è

$$u_1 = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0).$$

Poi calcolo

$$\begin{aligned} u'_2 &= (1, 1, 1, 1) - \left((1, 1, 1, 1) \cdot (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0) \right) (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0) = \\ &= (1, 1, 1, 1) - (4/6, 8/6, 4/6, 0) = (1/3, -1/3, 1/3, 1) \end{aligned}$$

che normalizzato diventa

$$u_2 = (1/\sqrt{12}, -1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12}, 3/\sqrt{12}) = (1/(2\sqrt{3}), -1/(2\sqrt{3}), 1/(2\sqrt{3}), 3/(2\sqrt{3})).$$

Un vettore di W , che scrivo come $a(1, 2, 1, 0) + b(1, 1, 1, 1) = (a+b, 2a+b, a+b, b)$, appartiene a U (che ha dimensione 2 per Rouché-Capelli) se e solo se (sostituendo nelle equazioni di U)

$$\begin{cases} 2a + b + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

ovvero $b = -a$, quindi $U \cap W = \langle (0, 1, 0, -1) \rangle$. Segue dalla formula delle dimensioni che $\dim(U + W) = 3$ e quindi una sua base è data dai vettori $((0, 1, 0, -1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0))$ (basta notare che $(1, 0, 0, 0)$ è un vettore di U che non è un multiplo di $(0, 1, 0, -1)$). $\square$

Esercizio 3. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ considerare l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A_a := \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a & a+1 & 0 \\ a-1 & 1-a & a \end{pmatrix}.$$

- (1) Dire per quali valori di a l'endomorfismo f_a non è iniettivo. Per tali valori, determinare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine di f_a .
- (2) Al variare del parametro a , discutere la diagonalizzabilità di f_a .
- (3) Per tutti i valori per i quali f_a è diagonalizzabile, trovare una base di autovettori ed due matrici D diagonale e H invertibile tali che $A_a = HDH^{-1}$.

Proof. Svolgimento Il determinante della matrice A_a si calcola facilmente e vale

$$a \cdot \det \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & a+1 \end{pmatrix} = a \cdot (1 - a^2 + a^2) = a$$

dunque la matrice A_a è invertibile se e solo se $a \neq 0$. Segue che l'unico valore di a per il quale f_a non è invertibile è $a = 0$. In questo caso, la matrice che rappresenta f_a è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 (non può avere rango 3 e la prima e la seconda colonna della matrice sono tra loro indipendenti). Visto che la matrice A_a è calcolata rispetto alle basi canoniche, l'immagine è il sottospazio $\langle (1, 0, -1), (0, 0, 1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ ed il cui nucleo è il sottospazio $\langle (0, 0, 1) \rangle$ (che si ottiene osservando che l'immagine del terzo vettore della base canonica è il vettore nullo, oppure risolvendo il sistema $AX = 0$).

Il polinomio caratteristico di A_a è

$$P_a(t) = \det \begin{pmatrix} 1-a-t & a & 0 \\ -a & a+1-t & 0 \\ a-1 & 1-a & a-t \end{pmatrix} = (a-t)(t^2 - 2t + 1) = (a-t)(t-1)^2$$

e quindi gli autovalori di A_a sono $t = a$ e $t = 1$. Se $a = 1$ la molteplicità algebrica di 1 è 3. In questo caso,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

il rango della matrice

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vale 1, quindi la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è $3 - 1 = 2$. Poichè $3 \neq 2$, la matrice A_1 non è diagonalizzabile.

Supponiamo quindi $a \neq 1$. In questo caso, la matrice risulta diagonalizzabile se e solo se il rango della matrice $A_a - 1$ è 1 (stesso ragionamento fatto prima). Si ha:

$$A_a - 1 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -a & a & 0 \\ a-1 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

Le prime due colonne sono linearmente dipendenti per qualunque valore di a . Il rango di questa matrice è dunque 1 se e solo se la terza colonna è un multiplo della prima, e perciò a

deve essere uguale a zero. Concludendo, A_a è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$, ovvero

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, posso trovare gli autospazi relativi ai due autovalori 0 e 1. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è il nucleo di f_0 precedentemente calcolato, generato da $(0, 0, 1)$. L'autospazio relativo all'autovalore 1 è la soluzione del sistema $A_0 X = X$ (con $X = (x, y, z)$) da cui ottengo i due vettori indipendenti $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, 1)$. Quindi una base di autovettori è

$$\{(0, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 1)\}.$$

Segue che

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici richieste. □

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 nella variabile X . Indichiamo con $\mathcal{C} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonica di questo spazio. Definiamo l'insieme $\mathcal{B} := \{1 + X, X + X^2, X^2, X^2 + X^3\}$.

(a) Mostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V ; trovare la matrice H di cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ e calcolare H^{-1} .

(b) Sia $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita dalle condizioni seguenti:

$$\varphi(1 + X) = (1, 0, 0); \quad \varphi(X + X^2) = (1, 1, 0); \quad \varphi(X^2) = (1, 1, 1); \quad \varphi(X^2 + X^3) = (1, 1, -1).$$

Scrivere la matrice di φ rispetto alla base $\mathcal{C}$ di V e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Per mostrare che i vettori di $\mathcal{B}$ sono una base, basta mostrare che sono indipendenti. Supponiamo quindi di avere una combinazione lineare nulla:

$$a(1 + X) + b(X + X^2) + c(X^2) + d(X^2 + X^3) = 0.$$

Ottengo

$$a + (a + b)X + (b + c + d)X^2 + dX^3 = 0$$

e perciò $a = 0$, $a + b = 0 \Rightarrow b = 0$, $d = 0$, $b + c + d = 0 \Rightarrow c = 0$, quindi i vettori sono indipendenti. Per trovare la matrice di cambio di base, basta osservare che:

$$1 = (1 + X) - (X + X^2) + X^2;$$

$$X = (X + X^2) - X^2;$$

$$X^2 = X^2$$

$$X^3 = -X^2 + (X^3 + X^2)$$

perciò la matrice H risulta essere:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre H^{-1} è

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice di φ , basta notare che:

$$\varphi(1) = \varphi((1 + X) - (X + X^2) + X^2) = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (1, -1, 1)$$

$$\varphi(X) = \varphi((X + X^2) - X^2) = (1, 1, 0) - (1, 1, 1) = (0, 0, -1);$$

$$\varphi(X^2) = (1, 1, 1)$$

$$\varphi(X^3) = \varphi(-X^2 + (X^3 + X^2)) = -(1, 1, 1) + (1, 1, -1) = (0, 0, -2)$$

e quindi la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 5. Nello spazio affine standard considerare le rette

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \quad ; \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

- (a) Stabilire la posizione reciproca delle rette r ed s .
- (b) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente sia r che s .
- (c) Trovare la proiezione ortogonale del punto $P = (1, 1, 1)$ sul piano π , ed indicarla con Q .
- (d) Mostrare che la retta r e la retta t passante per P e Q sono sghembe; trovare la distanza tra r e t , la retta di minima distanza ed i punti di minima distanza.

Svolgimento. Le equazione parametriche della retta r e della retta s sono rispettivamente

$$r : (0, 1, 0) + \langle (1, 1, -2) \rangle$$

$$s : (1, 0, 0) + \langle (0, 1, -1) \rangle$$

quindi le due rette non sono parallele. La loro intersezione si ottiene facilmente risolvendo il sistema $r \cap s = (1, 2, -2)$. Le due rette sono quindi incidenti e distinte. Il piano π che le contiene ha equazione parametrica

$$\pi : (1, 2, -2) + \langle (1, 1, -2), (0, 1, -1) \rangle$$

da cui ricavo l'equazione cartesiana

$$\pi : x + y + z = 1.$$

Noto che il punto P non appartiene a π , e la retta per P perpendicolare a π è

$$t : (1, 1, 1) + \langle (1, 1, 1) \rangle$$

che ha equazione cartesiana

$$t : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

la cui intersezione con π si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

ovvero il punto $Q = (1/3, 1/3, 1/3)$. La direzione di t è $(1, 1, 1)$, mentre quella di r è $(1, 1, -2)$, quindi r e t non sono parallele. Inoltre, Q non appartiene ad r , visto che $2/3 + 1/3 = 1 \neq 0$; questo basta per concludere che r e t sono sghembe: se non lo fossero, visto che non sono parallele, sarebbero incidenti, ma $r \cap t$ deve essere contemporaneamente un punto di t e di π (visto che π contiene r) da cui segue immediatamente che se $r \cap t \neq \emptyset$, allora $r \cap t = \pi \cap t = Q$, ma Q non appartiene a r . Per trovare la retta di minima distanza, impongo ad esempio che un vettore generico che congiunge un punto di r ed un punto di t sia perpendicolare sia ad r che a t . Un punto generico di r è $(a, 1+a, -2a)$ mentre un punto generico di t è (b, b, b) quindi un vettore generico come sopra è $(a-b, 1+a-b, -2a-b)$. Imponendo l'ortogonalità, ho

$$\begin{cases} (a-b, 1+a-b, -2a-b) \cdot (1, 1, -2) = 0 \\ (a-b, 1+a-b, -2a-b) \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} a-b+1+a-b+4a+2b=0 \\ a-b+1+a-b-2a-b=0 \end{cases}$$

da cui ottengo facilmente $b = -2a$ (sottraendo le due equazioni) da cui:

$$a+2a+1+a+2a-2a+2a=0$$

e quindi $a = -1/6$ e $b = 1/3$. Ottengo quindi i punti di minima distanza $(-1/6, 5/6, 1/3)$ e $(1/3, 1/3, 1/3)$. La retta di minima distanza è quindi

$$(1/3, 1/3, 1/3) + \langle -1/2, 1/2, 0 \rangle = (1/3, 1/3, 1/3) + \langle (1, -1, 0) \rangle.$$

□

Esercizio 6. Scrivere il numero complesso $\frac{2}{1+i}$ in forma trigonometrica. Trovare le soluzioni dell'equazione $z^3 = \frac{2}{1+i}$ esprimendole in forma trigonometrica.

Proof. Moltiplicando e dividendo per $(1-i)$ ottengo $2(1-i)/2 = 1-i$. Quindi il modulo richiesto è $\sqrt{2}$ e l'argomento è $7\pi/4$:

$$\frac{2}{1+i} = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)).$$

Le radici richieste sono di conseguenza:

$$\zeta_k = \sqrt[6]{2} \cos(7\pi/12 + 2k\pi/3) + i \sin(7\pi/12 + 2k\pi/3)$$

per $k = 0, 1, 2$.

□