FALG – ICM

M. LONGO
TEMPO: 3 ORE.

Due esercizi di teoria, scelti tra quelli sotto, a seconda delle versioni. Per le soluzioni, consultare un testo.

Esercizio 1 (Teoria)**.** (1) Sia $f : V \to W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali. Dimostrare che il nucleo $\ker(f)$ di f è un sottospazio di V.

(2) Supponiamo che $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia una funzione lineare e che v e w siano due autovettori relative a due autovalori λ, μ. Dimostrare che se $\lambda \neq \mu$ allora $\dim\langle v, w\rangle = 2$.

(3) Sia $f : V \to W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali. Dimostrare che l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f è un sottospazio di V.

(4) Siano v e w due vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriali V. Sia $u \in \langle v, w\rangle$. Dimostrare che u si scrive *in modo unico* come combinazione lineare di v e w.

(5) Supponiamo che $\phi : V \to W$ sia una funzione lineare e che v_1 e v_2 siano due vettori linearmente indipendenti di V. Dimostrare che se ϕ è iniettiva, allora $\phi(v_1)$ e $\phi(v_2)$ sono due vettori linearmente indipendenti di W.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, consideriamo il sistema

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + (a^2 - a + 3)x_3 = a - 3. \end{cases}$$

(a) Discutere la risolubilità del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(1) Per tutti i valori di a per i quali il sistema ha soluzione, determinarla e scriverla nella forma $X_0 + W$ dove X_0 è una soluzione particolare del sistema, e W è un sottospazio vettoriale, eventualmente nullo.

Svolgimento. Con operazioni elementari si ottiene la matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2 - a & a - 1 \end{pmatrix}$$

Se $a \neq 0, 1$ i ranghi della matrice completa e incompleta coincidono e abbiamo una sola soluzione che determino ricorsivamente: $\{(3 + 2a)/a, -(a + 2)/a, 1/a)\}$. Se $a = 0$ il rango della matrice incompleta e della matrice completa sono 3 e 4, quindi il sistema non ammette soluzione. Se $a = 1$ il rango delle matrici complete e incomplete è 3; una soluzione

Date: 25 Gennaio 2019.

particolare e' $(2,-1,0)$ mentre la soluzione del sistema omogeneo associato è $\langle(3,-2,1)\rangle$, quindi la soluzione in questo caso e' $(2,-1,0)+\langle(3,-2,1)\rangle$. $\square$

Esercizio 3 (3 punti)**.** Siano $U=\langle(1,2,-1,-2),(0,1,-1,-2)\rangle$ e

$$W=\begin{cases} x_1-x_2=0\\ x_3+x_4=0\end{cases}$$

due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Determinare dimensione e base di $U\cap W$. Completare una base di $U\cap W$ ad una base di $U+W$.

Svolgimento. Inserendo un punto generico $(a,2a+b,-a-b,-2a-2b)$ nell'equazione di W ottengo un sistema (in a,b)

$$\begin{cases} a-2a-b=0\\ -a-b=2a+2b\end{cases}$$

che ha come $\langle(1,-1)$; sostituendo i valori $a=1$ e $b=-1$ ottengo un generatore dell'intersezione, ovvero $U\cap W=\{(1,1,0,0)\}$. Per completare ad una base scelgo un vettore di U che non stia in $U\cap W$ e un vettore di W che non stia in $U\cap W$, ottenendo la base di $U+W$ data dai vettori $(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,-1-2)$. $\square$

Esercizio 4 (3 punti)**.** Dire per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a^2\\ 1 & 1 & 1\\ 1+a(a-1) & 1 & 1\end{pmatrix}$$

è ortogonalmente diagonalizzabile. Per tali valori di a, determinare una base ortonormale di autovettori.

Proof. Per essere ortogonalmente diagonalizzabile deve essere simmetrica, ovvero $1+a^2=1+a(a-1)$, che ha come soluzione $a=0$. La matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Il resto dell'esercizio è stato svolto a lezione. Il polinomio caratteristico è $X^2(X-3)$, e gli autospazi sono $V_0=\langle(1,0,-1),(1,-1,0)\rangle$ e $V_1=\langle(1,1,1)\rangle$ (relativi agli autovalori 0 e 1, rispettivamente). Applicando il procedimento di GS a V_1 ottengo la base ortonormale $\{1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}),(-\sqrt{2}/\sqrt{3},\sqrt{2}/\sqrt{3},-\sqrt{2}/2\sqrt{2})$, quindi

$$\{1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}),(-\sqrt{2}/\sqrt{3},\sqrt{2}/\sqrt{3},-\sqrt{2}/2\sqrt{3}),(1/2\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$$

e' la base ortonormale cercata. $\square$

Esercizio 5 (4 punti)**.** Discutere la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1+2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico é $-X(1-X)(a-X)$. Se $a \neq 0, 1$, i tre autovalori sono distinti quindi la matrice 'e diagonalizzabile. Se $a = 0$ il polinomio caratteristico è $X^2(1-X)$ e la matrice è diagonalizzabile se e solo se la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è 2, ovvero se e solo se il rango della matrice

$$A_0 - 0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 1; poiché il rango di questa matrice è 1, A_0 è diagonalizzabile. Se $a = 1$, il polinomio caratteristico diventa $-X(1-X)^2$, dunque A_1 è diagonalizzabile se e solo se la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è 2, ovvero se e solo se il rango della matrice

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è 1; poiché il rango di questa matrice è due, A_1 non è diagonalizzabile. □

Esercizio 6 (4 punti)**.** Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste una applicazione lineare $f_a : V \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f_a(1+X) = (1,0); \quad f_a(1-X) = (-1, a+1); \quad f_a(X^2) = (2,-1); \quad f_a(2) = (0, 2a).$$

Per tali valori di a, determinare la matrice di f_a rispetto alla base $\{1, X, X^2\}$ di V e la base canonica $\{(1,0),(0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$; trovare infine $\ker(f_a)$.

Svolgimento. I vettori $1+X, 1-X, X^2$ sono una base fi V, quindi l'applicazione lineare esiste se e solo se $f_a(2)$ e' implicata dalle condizioni definite su questa base. Noto che $2 = (1+X) + (1-X)$, dunque, applicando f_a, ottengo la relazione $(0, 2a) = (1,0) + (-1, a+1) = (0, a+1)$, che è verificata solo per $a = 1$. Per questo valore, $f_1(1) = (0,1)$, $f_1(X) = f_1(1+X) - f_1(1) = (1,0) - (0,1) = (1,-1)$ e $f_1(X^2) = (2,-1)$. Ottengo quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'immagine è $\mathbb{R}^2$, quindi il nucleo ha dimensione 1. Risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottengo il sottospazio $\langle (1,2,-1) \rangle$, e dunque $\ker(f_1) = \langle 1 + 2X - X^2 \rangle$. □

Esercizio 7 (4 punti)**.** Sia r la retta parallela la vettore $(1, 1, -1)$ e passante per il punto $(2, 0, 0)$. Sia s la retta di equazione cartesiana:

$$s : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Dopo aver stabilito la posizione reciproca di r ed s, determinarne la distanza.

Svolgimento. Un facile calcolo mostra che $s : (3.0, -2) + \langle(1, 1, -2)\rangle$ quindi le due rette non sono parallele. Inoltre, sostituendo le parametriche di r nelle cartesiane di s si ottiene che $r \cap s = \emptyset$, quindi r ed s sono sghembe. I punti generici di r ed s sono $(2 + a, a, -a)$ e $(3+b, b, -2-2b)$, quindi un vettore che li congiunge è $(1b-a, b-a, -2-2b+a)$. Imponendo la condizione di perpendicolarità con gli spazi direttori di r ed s ottengo il sistema:

$$\begin{cases} (1b - a, b - a, -2 - 2b + a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ (1b - a, b - a, -2 - 2b + a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} 1b - a + b - a + 2 + 2b - a = 0 \\ 1b - a + b - a + 4 + 4b - 2a = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $b = -3/2$ e $a = -1$. Sostituendo, ottengo il vettore $(1/2, -1/2, 0)$ la cui norma è $1/\sqrt{2}$, che è la distanza tra r ed s. □

Esercizio 8 (3 punti)**.** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $X^5 = 2$.

Svolgimento. Le soluzioni sono

$$\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\cos\frac{2\pi k}{5}\right)$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4$. □