FALG – ICM
26 GENNAIO 2018

M. LONGO

Tempo: 2h e 15 minuti. Ogni punto di ogni esercizio vale 3 punti.

Esercizio 1. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,0,1)$ e $(1,0,1,1)$. Sia inoltre W la soluzione (in $\mathbb{R}^4$) del seguente sistema:

$$W: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Trovare una base di $U \cap W$ ed una base di $U + W$.
(b) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $(1,1,1,1)$ sul sottospazio V.

Esercizio 2. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 - 2 & a^2 - 1 & a \\ 0 & 0 & a - 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Per ogni valore $t \in \mathbb{R}$, definiamo il vettore $v_t = (1, t, 1)$. Dire se esistono valori di a e di t per i quali v_t è un autovettore per A_a, ed in questo caso dire per quale autovalore v_t è un autovettore.
(b) Determinare una base di tutti gli autospazi di A_2.
(c) Discutere al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità di A_a.

Esercizio 3. Siano $r = (0,1,1) + \langle (1,1,1) \rangle$ e

$$s: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

due rette dello spazio affine standard. Sia infine π il piano contenente s e passante per il punto $O = (0,0,0)$. Sia $A = r \cap \pi$ l'intersezione di r con π. Trovare tutti i punti di s che abbiano distanza $\sqrt{10}$ da A.

Esercizio 4. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, definire il seguente sistema:

$$\Sigma_a: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + (a^2 - 2a)x_3 = a^2 - a + 2 \end{cases}$$

(a) Discutere la risolubilità del sistema Σ_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(b) In tutti i casi in cui il sistema ammette più di una soluzione, esprimerne le soluzioni stesse nella forma $X + V$ dove $X \in \mathbb{R}^3$ e V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali V e W sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

(a) Dopo aver ricordato la definizione di *nucleo* $\ker(f)$ di f, dimostrare che $\ker(f)$ è un sottospazio di V.

(b) Fissiamo un vettore $v_0 \in V$ e definiamo $w_0 = f(v_0)$ la sua immagine tramite f. Definiamo al solito

$$f^{-1}(w_0) = \{v \in V | f(v) = w_0\}.$$

Dimostrare che $f^{-1}(w_0) = v_0 + \ker(f)$.