FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
27 GIUGNO 2016

MATTEO LONGO

Ogni versione del compito contiene solo due tra i quattro esercizi 6-7-8-9.

Esercizio 1. Considerare i sottospazi U e W_t di $\mathbb{R}^4$ definiti, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, dalle condizioni:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e $W_t = \langle (1, 2, 0, 0), (0, t, 0, t - 1) \rangle$.

(1) Determinare tutti i valori del parametro t per i quali U e W_t sono in somma diretta.
(2) In tutti i casi in cui U e W_t non sono in somma diretta, trovare una base di $U \cap W_t$ e completarla ad una base di $U + W_t$.

Soluzione. Una base di U è data dai vettori $(1, 0, -1, 0)$ e $(2, -1, 0, -1)$. I sottospazi U e W_t sono in somma diretta se e solo $U + W_t = \mathbb{R}^4$, dunque se e solo se

$$\{(1, 0, -1, 0), (2, -1, 0, -1), (1, 2, 0, 0), (0, t, 0, t - 1)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$. Questo avviene se e solo se il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

è non zero. Un semplice calcolo (ad esempio sviluppando il determinante lungo la terza colonna) mostra che questo avviene se e solo se $t \neq 5/4$. Per $t = 5/4$ si calcola facilmente $U \cap W_{5/4} = \langle (2, -1, 0, -1) \rangle$, impostando ad esempio il sistema

$$x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(2, -1, 0, -1) = x_3(2, 1, 0, 0) + x_4(0, 5, 0, 1).$$

Segue che una base di $U + W_{5/4}$ come richiesto è $\{(2, -1, 0, -1), (1, 0, -1, 0), (2, 1, 0, 0)\}$. □

Esercizio 2. Considerare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\Sigma_k : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + (k-2)x_3 = 1 \\ x_2 + kx_3 + (k-1)x_4 = k \end{cases}$$

nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4.

(1) Discutere la risolubilità del sistema Σ_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Determinarne, quando possibile, la soluzione, esprimendola nella forma $X + W$ con X soluzione del sistema e W un spazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & k-2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & k-1 & k \end{pmatrix}$$

ed applicando il metodo di riduzione a scalini si ottiene facilmente la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, il determinante di questa matrice è diverso da 0, quindi il sistema ammette un'unica soluzione, che si calcola facilmente in modo ricorsivo: $(0,1,0,1)$. Se $k=0$ oppure $k=1$ il rango della matrice completa ed incompleta del sistema è 3, quindi le soluzioni sono del tipo $\bar{R}+W$ con $\dim(W)=1$, W soluzione del sistema omogeneo associato, e $\bar{X}$ una soluzione particolare; facendo i calcoli si ottiene che le soluzioni sono $(0,1,0,1)+\langle(1,0,1,0)\rangle$ se $k=0$ e $(0,1,0,1)+\langle(1,-1,1,-1)\rangle$ se $k=1$. □

Esercizio 3. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-k & k & -k \\ -k & k+1 & -k+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Discutere la diagonalizzabilit di A_k al variare del parametro k.
(2) In tutti i casi in cui A_k risulti diagonalizzabile, trovarne una base di autovettori e determinare due matrici P e D tali che $A_k = PDP^{-1}$, dove D è una matrice diagonale.

Soluzione. Il calcolo del polinomio caratteristico si ottiene sviluppando il determinante ad esempio lungo l'ultima riga, ottenendo:

$$A_k := \det \begin{pmatrix} 1-k-t & k & -k \\ -k & k+1-t & -k+1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = -(t-2)(t-1)^2.$$

L'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è pari a 2, e questo avviene se e solo se il rango della matrice $A_k - 1$ è $3-2=1$. Osservo che la matrice

$$A_k - 1 = t \begin{pmatrix} -k & k & -k \\ -k & k & -k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango uguale a 1 se e solo se $k=0$, quindi l'endomorfismo risulta diagonalizzabile se e solo se $k=0$. (Non è necessario discutere l'autovalore $t=2$, visto che la sua molteplicità geometrica è 1 necessariamente.) Un facile calcolo mostra ora che una base dell'autospazio relativo a 1 per A_0 è $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ e che una base dell'autospazio relativo all'autovalore 2 è $\{(0,1,1)\}$. Le matrici richieste sono quindi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad eP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile X, a coefficienti reali. Sia inoltre $W = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 nella variabile X, a coefficienti reali.

(1) Scrivere la matrice rispetto alle basi $\{1, X, X^2, X^3\}$ di V e $\{1, X, X^2\}$ di W della funzione lineare $\phi : V \to W$ definita sulla base $\{1+X, 1-X, X^2+X, X^3\}$ di V dalle condizioni $1+X \mapsto 1+X$, $1-X \mapsto X^2$, $X^2+X \mapsto X^2$, $X^3 \mapsto X^2 - X$.
(2) Determinare il nucleo e l'immagine di ϕ.

Svolgimento. Noto che $1 = \frac{1+X}{2} + \frac{1-X}{2}$, quindi

$$\phi(1) = \phi\left(\frac{1+X}{2} + \frac{1-X}{2}\right) = \phi\left(\frac{1+X}{2}\right) + \phi\left(\frac{1-X}{2}\right) =$$
$$= \frac{\phi(1+X)}{2} + \frac{\phi(1-X)}{2} = \frac{1+X}{2} + \frac{X^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot X + \frac{1}{2}\cdot X^2$$

per cui la prima colonna della matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Con calcoli simili otteniamo le altre colonne: dalla relazione $X = \frac{1+X}{2} - \frac{1-X}{2}$ ottengo $\phi(X) = \frac{1+X-X^2}{2}$, dalla relazione $X^2 = X^2 + X - X$ (usando il fatto che ho già calcolato $\phi(X)$) ottengo $\phi(X^2) = \frac{-1-X+3X^2}{2}$; infine è noto dalle ipotesi che $\phi(X^2) = -X + X^2$. La matrice cercata è dunque:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

E' facile verificare che questa matrice ha rango 3: ad esempio, la prima, seconda e quarta colonna sono indipendenti: il sistema

$$x_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

si traduce come

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Perciò una base dell'immagine di ϕ è $\{1, X, X^2\}$, perchè ϕ è suriettiva. Inoltre, il nucleo di ϕ deve avere dimensione 1, e risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si mostra facilmente che $\ker(\phi)$ che è generato dal vettore $(1, -2, -1, 0)$. □

Esercizio 5. Consideriamo le due rette sghembe di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ r ed s definite dalle equazioni

$$r = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad ; \qquad s = (1,1,1) + \langle (1,-1,0) \rangle.$$

(1) Trovare la retta t che interseca sia r che s ed è parallela al vettore $(1, 0, 1)$.
(2) Indicati con P e Q i punti di intersezione tra t e le due rette r ed s, e detto π il piano che contiene sia t che r, determinare tutti i quadrati di lato PQ contenuti in π.

Svolgimento. Le equazioni parametriche di r sono $r : (1, 0, -1) + \langle(1, 1, 2)\rangle$, quindi il piano σ che contiene r e t è dato dalle equazioni parametriche

$$\pi : (1, 0, -1) + \langle(1, 1, 2), (1, 0, 1)\rangle$$

ed un semplice calcolo permette di ricavare la sua equazione cartesiana

$$\pi : x - 3y - z - 2 = 0.$$

Le equazioni cartesiane di s sono:

$$s : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Intersecando π con s ottengo il sistema

$$\begin{cases} x - 3y - z - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è il pounto $Q = (9/4, -1/4, 1)$. Quindi $Q \in t$, da cui $t : Q + \langle(1, 0, 1)\rangle$. Le equazioni cartesiane di t sono quindi

$$t : \begin{cases} x - z = 5/4 \\ y = -1/4 \end{cases}$$

ed intersecando con r ottengo il punto P dal sistema

$$\begin{cases} x - z = 5/4 \\ y = -1/4 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

che restituisce $P = (3/4, -1/4, -1/2)$. Ottengo quindi $Q-P = (3/2, 0, 3/2)$ da cui $\| Q-P \| = \sqrt{18/4}$. Il piano che contiene t ed r è π, il cui sottospazio direttore è $\langle(1, 1, 2), (1, 0, 1)\rangle$; quindi un vettore generico di questo piano è dato da $a(1, 1, 2) + b(1, 0, 1) = (a + b, a, -2a + b)$. Se richiedo che un vettore di questo tipo sia ortogonale a $Q - P$, devo risolvere il sistema

$$(a + b, a, -2a + b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi ottengo $a = 2b$. Il vettore richiesto è quindi $(3, 2, -3)$, la cui norma è $\sqrt{22}$. Un vettore di norma $\sqrt{18/4}$ parallelo a $(3, 2, -3)$ è quindi

$$v = (\sqrt{18/88})(3, 2, -3) = (3/\sqrt{44})(3, 2, -3).$$

I quadrati cercati sono dunque quelli di lati $P, P \pm v, Q, Q \pm v$. □

Esercizio 6. Dimostrare che m vettori $\{v_1, \ldots, v_m\}$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

Svolgimento. Standard: vedere un qualunque libro di algebra lineare. Ad esempio, Bottacin, *Algebra lineare e Geometria*, Ed. Esculapio, Prop. 1.3.29. □

Esercizio 7. Indichiamo con $(v, w) \mapsto v \bullet w$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$, e con $\| v \| = \sqrt{v \bullet v}$ la norma ad esso associata. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $\| v \| = \| \phi(v) \|$, per ogni v in $\mathbb{R}^n$ allora gli autovalori di ϕ sono 1 oppure -1.

Svolgimento. Sia λ un autovalore, e v un autovettore corrispondente. Poichè $(\lambda v) \bullet (\lambda v) = \lambda^2(v \bullet v)$, l'ipotesi implica che $(\lambda^2 - 1)(v \bullet v) = 0$. Poichè $v \neq 0$, ottengo $\lambda^2 = 1$, da cui la tesi. □

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Dimostrare o fornire un controesempio per ciascuna delle seguenti due affermazioni:

(1) Due autovettori relativi a due autovalori distinti sono tra essi linearmente indipendenti.
(2) Se due autovettori sono linearmente indipendenti, allora gli autovettori corrispondenti sono distinti.

Svolgimento. La prima affermazione è vera: vedere un qualunque libro di algebra lineare. Ad esempio, Bottacin, *Algebra lineare e Geometria*, Ed. Esculapio, Prop. 4.1.15. In realtà, l'esercizio è più semplice, non richiedendo di ricorrere all'induzione: siano $\phi(v)\lambda v$ e $\phi(w)\mu w$, con $\lambda \neq \mu$. Se fosse $x_1 v + x_2 w = 0$, applicando ϕ otterrei $x_1\lambda v + x_2\mu w = 0$; moltiplicando la relazione $x_1 v + x_2 w = 0$ per λ ottengo $x_1\lambda v + x_2\lambda w = 0$; sottraendo le relazioni $x_1\lambda v + x_2\mu w = 0$ e $x_1\lambda v + x_2\lambda w = 0$ ottengo $(\lambda - \mu)x_2 w = 0$ e, poich''e $w \neq 0$ e $\lambda - \mu \neq 0$, ottengo $x_2 = 0$. Dalla relazione $x_1 v + x_2 w = 0$ ottengo per sostituzione $x_1 v = 0$, da cui $x_1 = 0$. La seconda affermazione è palesemente falsa: come controesempio basta considerare un endomorfismo che abbia un autospazio di dimensione maggiore di 1; ad esempio, l'identità di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è un contresempio. molteplicità □

Esercizio 9. Indichiamo con $(v, w) \mapsto v \bullet w$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ tali che $v_i \bullet v_j = 0$ se $i \neq j$. Provare che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Svolgimento. Standard: vedere un qualunque libro di algebra lineare. Ad esempio, Bottacin, *Algebra lineare e Geometria*, Ed. Esculapio, Prop. 5.4.16. Per completezza, ricordo la dimostrazione: Basta dimostrare che questi n vettori sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una relazione

$$x_1 v_1 + \dots x_n v_n = 0.$$

Moltiplicando per il vettore v_i ed usando la linearità di $\bullet$, ottengo la relazione

$$x_1(v_1 \bullet v_i) + \cdots + x_{i-1}(v_{i-1} \bullet v_i) + x_i(v_i \bullet v_i) + x_{i+1}(v_{i+1} \bullet v_i) \dots x_n(v_n \bullet v_i) = 0.$$

Usando l'ipotesi, questa relazione diventa

$$x_i(v_i \bullet v_i) = 0.$$

Poichè $v_i \bullet v_i \neq 0$, ottengo $x_i = 0$. Poichè questo calcolo vale per ogni i, ottengo $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Quindi i vettori considerati sono linearmente indipendenti. □