

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

CANALE 4, M. LONGO

Appello – 5 luglio 2013

DOMANDE

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo K .
 - (a) Completare la definizione ‘ $\lambda \in K$ è un autovalore per f se...’
 - (b) Fissiamo una base di V , e supponiamo che rispetto a questa base f sia rappresentato dalla matrice A . Dimostrare che se $p_A(x)$ è il polinomio caratteristico di A e λ è un autovalore per f risulta $p_A(\lambda) = 0$.
2. Sia $u \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo. Indichiamo con $\cdot$ il solito prodotto scalare. Dimostrare che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è somma del vettore $\frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$ parallelo ad u e del vettore $v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$ ortogonale ad u .
3. Siano $v_1, \dots, v_n$ generatori di uno spazio vettoriale V . Mostrare che se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è ancora un insieme di generatori di V , allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

ESERCIZI

Esercizio 1. Al variare del parametro reale k , si consideri l’endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & -1 & k+2 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare i valori di k per i quali f_k non è un isomorfismo, e per tali valori determinare il nucleo e l’immagine di f_k .
- (b) Controllare che $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore per ogni f_k , determinando l’autovalore corrispondente.
- (c) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità geometrica di -1 .
- (d) Determinare i valori del parametro k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile.
- (e) Per i valori di k trovati al punto precedente, determinare una matrice diagonale D e una matrice H tale che $H^{-1}A_kH = D$.

Svolgimento. (a) Basta imporre che il determinante della matrice A_k sia zero: si ottiene $k = -1$, da cui ricavo $\ker(f_k) = \langle (0, 1, 1) \rangle$, $\text{im}(f_k) = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle$.

(b) $A_k e_2 = -e_2$ per ogni k , quindi e_2 è autovettore di autovalore -1 .

(c) Ricordo che la molteplicità geometrica è uguale a 3 meno il rango della matrice $A_k - (-1)$. Si ha

$$A_k - (-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & k+2 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

da cui ricavo immediatamente che se $k \neq 0$ e $k \neq -2$ la molteplicità geometrica di -1 è 1 ed è 2 se $k = 0$ oppure $k = -2$.

(d) Il polinomio caratteristico di A_k risulta $P_{A_k}(X) = (X + 1)^2(k + 1 - X)$. Se $k = -2$, allora ho una sola radice $X = -1$ di molteplicità algebrica 3. In questo caso, la molteplicità geometrica di -1 è 2 (punto precedente), quindi A_k non è diagonalizzabile. Se $k \neq -2$, ho due autovalori distinti, -1 e $k + 1$, di molteplicità algebrica 2 e 1, rispettivamente. Quindi A_k è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di -1 è 2, e questo avviene se e solo se $k = 0$ (punto precedente).

(e) Dal punto precedente risulta che A_k è diagonalizzabile solo per $k = 0$. In questo caso, calcolando gli autospazi, risulta

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere un'equazione del piano α passante per A e ortogonale alla retta r .

(b) Scrivere un'equazione del piano β contenente r ed A .

(c) Calcolare la distanza di A da r e le coordinate del punto P di r che realizza la distanza minima.

Svolgimento (a) Il piano α è $A + \langle v_1, v_2 \rangle$ con v_1, v_2 generatori dell'ortogonale al sottospazio direttore di r , che è generato dal vettore $(1, -1, 2)$ (direttamente dall'equazione parametrica di r). Segue

$$\alpha : (-1, 1, -4) + \langle (1, 1, 0), (2, 0, -1) \rangle.$$

Per l'equazione cartesiana: α è del tipo $x - y + 2z = d$ per qualche d , visto che lo spazio direttore della retta r è $(1, -1, 2)$. Sostituendo le coordinate del punto A , otteniamo $d = -10$.

(b) L'equazione cartesiana di r è

$$r : \begin{cases} x + y = -2 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$$

(direttamente sostituendo $-t$ nelle equazioni parametriche di r). Il fascio dei piani per r è dunque

$$\lambda(x + y + 2) + \mu(2y + z + 1) = 0$$

e sostituendo le coordinate del punto A ottengo

$$x + 5y + 2z + 4 = 0.$$

(c) Un generico punto di r è $P = (t - 2, -t, 2t - 1)$, per cui $P - A$ risulta $(1 - t, 1 + t, -3 + 2t)$. Imponendo che questo vettore sia ortogonale al sottospazio direttore di r ottengo $P - A = (2, 0, -1)$. La distanza tra A ed r è la norma di questo vettore, $\sqrt{5}$, mentre il punto P di minima distanza risulta essere $(-3, 1, -3)$. Si poteva ottenere anche il punto di minima distanza come intersezione tra α ed r .

Esercizio 3. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, sia U_t il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$U_t := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1 \\ t(t-1) \\ t \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Al variare del parametro t , si calcoli la dimensione ed una base di U_t .

(b) Per $t = 1$, si ponga $U = U_1$. Si calcoli l'ortogonale $W = U^\perp$ di U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$), indicando dimensione e base di W .

(c) Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, 1, 2, 1)$ sul sottospazio U .

(d) Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Si calcoli $S \cap W$.

(e) Sia trovino tutti i vettori $w \in S$ che soddisfano le seguenti condizioni: (i) la proiezione di w su U è il vettore nullo; (ii) la norma di w è pari a $\sqrt{7}$.

Svolgimento. (a) Considero la matrice A_t ottenuta mettendo in riga i generatori ottengo

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1+t & 1-t & 0 & t \\ 1+2t & 1 & t(t-1) & t \end{pmatrix}$$

Noto, ad esempio calcolando il determinante della matrice 3 per 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-t & 0 & t \\ 1 & t(t-1) & t \end{pmatrix},$$

che se $t \neq 0$ e $t \neq 1$ il rango della matrice A_t è 3, quindi U_t ha dimensione 3 ed una sua base è formata dai 3 vettori dati (alternativamente, si poteva studiare quando questi vettori erano lin. ind. impostando un sistema...). Nei casi rimanenti: per $t = 0$ ottengo che U_0 ha dimensione 1, generato da $(1, 1, 0, 0)$, mentre per $t = 1$, U_1 ha dimensione 2, con base formata dai due vettori $(1, 1, 0, 0)$ e $(2, 0, 0, 1)$.

(b) W è uno spazio vettoriale di dimensione $4-2=2$, costituito dall'insieme dei vettori (x, y, z, w) che abbiano prodotto scalare nullo con i generatori di U . Una base di W è $(1, -1, 0, -2)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

(c) Noto che $(3, 1, 2, 1) = (3, 1, 0, 1) - (0, 0, 2, 0) = (1, 1, 0, 0) + (2, 0, 0, 1) - (0, 0, 2, 0)$, che costituisce la decomposizione del vettore $(3, 1, 2, 1)$ lungo U e W (i primi 2 vettori della somma sono in U , il terzo in W). La proiezione richiesta è dunque la somma dei vettori di U , ovvero $(3, 1, 0, 1)$.

(d) Imponendo che il generico vettore $(a, -a, b, -2a)$ di W soddisfi le equazioni di S , risulta che l'intersezione è generata dal vettore $(-1, 1, 1, 2)$.

(e) Se la proiezione di w su U è nulla, allora w appartiene a W . Essendo un vettore di S , è della forma $(t, -t, -t, -2t)$ per qualche t . I vettori di norma $\sqrt{7}$ si ottengono per $t = 1$ e $t = -1$.

Esercizio 4. Si dica se la matrice a coefficienti complessi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i \\ 1-2i & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne calcoli l'inversa (coefficienti nella forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$).

Svolgimento Il determinante della matrice è $2 - i(1 - 2i) = -i$. L'inversa, notando che $i^{-1} = -i$, è dunque

$$A^{-1} = (-i)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -i \\ -1+2i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -2-i & -i \end{pmatrix}.$$