

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
8 SETTEMBRE 2015
VERSIONE A

DOCENTE: MATTEO LONGO

1. DOMANDE

2. ESERCIZI

Esercizio 1 (8 punti). Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, considerare l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ a^2 - a + 2 & -a^2 + a - 1 & a^2 + a & a^2 - a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^2 - a & -a^2 + a & 0 & a^2 - a - 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Discutere la diagonalizzabilità di A_0 ; nel caso in cui la matrice A_0 risultasse diagonalizzabile, trovare una base di autovettori di f_0 e una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che $A_0 = H^{-1}DH$.
- (b) Discutere la diagonalizzabilità di A_1 ; nel caso in cui la matrice A_1 risultasse diagonalizzabile, trovare una base di autovettori di f_1 e una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che $A_1 = H^{-1}DH$.
- (c) Discutere al variare del parametro a la diagonalizzabilità di A_a .

Svolgimento. Per $a = 0$, ho:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $(t - 1)^2(t + 1)^2$. La dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è pari alla differenza tra 4 ed il rango di $A_0 - 1$; visto che

$$A_0 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, la dimensione cercata è $4 - 2 = 2$; segue che la molteplicità geometrica ed algebrica dell'autovalore 1 coincidono, e sono entrambe pari a 2. Una base di autovettori per questo autospazio è $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$. Similmente, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è pari alla differenza tra 4 ed il rango di $A_0 + 1$; visto che

$$A_0 + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, la dimensione cercata è $4 - 2 = 2$; segue che la molteplicità geometrica ed algebrica dell'autovalore -1 coincidono, e sono entrambe pari a 2. Una base di autovettori per questo autospazio è $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Quindi A_0 è diagonalizzabile, ed una base di autovettori è data da $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e si ha:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per $a = 1$, la matrice diventa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $(t - 1)^2(t + 1)^2$. La matrice $A_1 - 1$ è

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 3; la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è quindi $4 - 3 = 1$, e la matrice A_1 non risulta diagonalizzabile.

Per il caso generale, un calcolo diretto mostra che il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \det(A_a - t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & a^2+a & 0 \\ a^2-a+2 & -a^2+a-1-t & a^2+a & a^2-a \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ a^2-a & -a^2+a & 0 & a^2-a-1-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ a^2-a+2 & -a^2+a-1-t & a^2-a \\ a^2-a & -a^2+a & a^2-a-1-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t)^2 \det \begin{pmatrix} -a^2+a-1-t & a^2-a \\ -a^2+a & a^2-a-1-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t)^2((-1-t)^2 - (-a^2+a)^2 + (a^2-a)^2) = (t-1)^2(t+1)^2. \end{aligned}$$

Studio l'autospazio relativo all'autovalore 1. Ho:

$$A_a - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2+a & 0 \\ a^2-a+2 & -a^2+a-2 & a^2+a & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2-a & -a^2+a & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix}.$$

Le prime due colonne della matrice sono l'una multipla dell'altra, quindi è solo necessario valutare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2+a & 0 \\ -a^2+a-2 & a^2+a & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a^2+a & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix}$$

ovvero, quello della matrice (eliminando la riga di zeri, che non contribuisce al rango)

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2 + a & 0 \\ -a^2 + a - 2 & a^2 + a & a^2 - a \\ -a^2 + a & 0 & a^2 - a - 2 \end{pmatrix};$$

il determinante di questa matrice è $4(a^2 + a)$. Quindi la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è 2 se e solo se $a = 0$ o $a = -1$. Studio ora l'autospazio relativo all'autovalore -1 . Ho:

$$A_a + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 + a & 0 \\ a^2 - a + 2 & -a^2 + a & a^2 + a & a^2 - a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ a^2 - a & -a^2 + a & 0 & a^2 - a \end{pmatrix}.$$

La seconda e la quarta colonna della matrice sono l'una multipla dell'altra, quindi è solo necessario valutare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 + a \\ a^2 - a + 2 & -a^2 + a & a^2 + a \\ 0 & 0 & 2 \\ a^2 - a & -a^2 + a & 0 \end{pmatrix}.$$

Sommando la prima e la seconda colonna ottengo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 + a \\ 2 & -a^2 + a & a^2 + a \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a^2 + a & 0 \end{pmatrix}$$

e sottraendo la prima e la seconda riga ottengo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 + a \\ 0 & -a^2 + a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a^2 + a & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $a \neq 0, 1$ allora questa matrice ha certamente rango 3, mentre se $a = 0, 1$ ha rango 2. Quindi la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è 2 se e solo se $a = 0$ o $a = 1$. Risulta quindi che la matrice è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$. $\square$

Esercizio 2 (4 punti). In $\mathbb{R}^4$ considerare i seguenti vettori: $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 1)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Sia inoltre $f_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni:

$$f(v_1) = (a, 1, a); \quad f(v_2) = (a, a, 1); \quad f(v_3) = (2a, a + 1, a + 1); \quad f(v_4) = (1, 0, 0).$$

- Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, trovare le coordinate del vettore $(3, 2, 2, -2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- Trovare la matrice di cambio di base dalla base canonica

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

alla base $\mathcal{B}$, e la sua inversa.

- Calcolare i valori di a per i quali f_a non è suriettiva. In ciascun caso, determinare una base del nucleo e dell'immagine di f_a .

Svolgimento. Per mostrare che è una base, basta notare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Risolvendo il sistema,

$$(3, 2, 2, -2) = x_1(1, 1, 0, 0) + x_2(1, 1, 1, 0) + x_3(0, 1, 0, 1) + x_4(0, 0, 0, 1)$$

si ottiene $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$, quindi le coordinate cercate sono $(1, 2, -1, -1)$. Noto ora che (risolvendo sistemi analoghi a quello precedente):

$$(1, 0, 0, 0) = v_1 - v_3 + v_4$$

$$(0, 1, 0, 0) = v_3 - v_4$$

$$(0, 0, 1, 0) = v_2 - v_1$$

$$(0, 0, 0, 1) = v_4.$$

Le matrici cercate sono quindi:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione lineare f_a non è suriettiva se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} a & a & 2a & 1 \\ 1 & a & a+1 & 0 \\ a & 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

è strettamente minore di 3. Il determinante del minore formato dalla prima e quarta colonna e prima e seconda riga è

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

quindi il rango è almeno 2. Inoltre, in questo caso,

$$\det \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - a^2$$

che è diverso da zero per $a \neq \pm 1$. Quindi, se $a \neq \pm 1$, la matrice ha rango 3 e dunque f_a è suriettiva. Restano da esaminare i due casi restanti.

Se $a = 1$ ottengo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. In questo caso, una base dell'immagine è data da $\langle (1, 1, 1), (1, 0, 0) \rangle$; il nucleo ha dimensione 2 e le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ di due generatori sono $(1, -1, 0, 0)$ e $(2, 0, -1, 0)$ (si ottengono dal sistema $AX = 0$); quindi il nucleo è generato da $v_1 - v_2$ e $2v_1 - v_3$.

Se $a = -1$ ottengo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. In questo caso, una base dell'immagine è data da $\langle (1, -1, 1), (1, 0, 0) \rangle$; il nucleo ha dimensione 2 e le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ di due generatori sono $(1, 1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1, 2)$ (si ottengono dal sistema $BX = 0$); quindi il nucleo è generato da $v_1 + v_2 - v_3$ e $v_3 - v_4$. $\square$

Esercizio 3 (4 punti). Considerare il sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + (a+1)x_3 + (a+1)x_4 = a+1 \\ x_1 - x_2 + ax_3 + (a^2+1)x_4 = 2a \end{cases}$$

- (a) Discutere al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema Σ_a .
- (b) In tutti i casi in cui il sistema Σ_a sia risolubile, trovarne la soluzione.

Svolgimento. La matrice completa del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & a+1 & a+1 \\ 1 & -1 & a & a^2+1 & 2a \end{pmatrix}$$

e tramite il metodo a scalini ottengo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a \end{pmatrix}.$$

(Qualche studente potrebbe essersi fermato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a^2 & 2a \end{pmatrix}$$

e aver discusso questa; non cambia nulla, solo che se $a \neq 0$ manca un passaggio nel metodo di eliminazione per scalini; tuttavia, notiamo che l'operazione di sottrarre dalla quarta la terza riga è lecita sempre, anche se $a = 0$).

Se $a \neq 0, 1$, il rango della matrice incompleta è 4, massimo, e quindi il sistema ammette un'unica soluzione, che si trova ricorsivamente a partire da $x_4 = 1/(a-1)$.

Se $a = 0$ la matrice completa diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2, uguale al rango della matrice incompleta, perciò la soluzione del sistema è del tipo $X_0 + W$ con $X_0 \in \mathbb{R}^4$ e $\dim(W) = 4 - 2 = 2$. Tramite sostituzione, ottengo la soluzione $X_0 = (1, 1, 0, 0)$ e $W = \langle (1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, -1) \rangle$.

Se $a = 1$, la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4, mentre la matrice incompleta ha rango 3; il sistema non è dunque risolubile in questo caso. $\square$

Esercizio 4 (6 punti). Sia s la retta di equazioni:

$$s : \begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

- (a) Trovare l'equazione cartesiana del piano che contiene s ed è parallelo al vettore $(1, 2, 3)$.
- (b) Trovare le rette sghembe r_1 ed r_2 la cui retta di minima distanza sia s e passanti per i punti $P = (5, 0, 0)$ e $Q = (-1, 0, 0)$ rispettivamente.
- (c) Sia π il piano contenente le rette s ed r_2 . Trovare la proiezione ortogonale della retta r_1 sul piano π .

Svolgimento. La retta s è $s = (0, 0, 1) + \langle(1, 2, -1)\rangle$, quindi il piano cercato ha equazione $(0, 0, 1) + \langle(1, 2, -1), (1, 2, 3)\rangle$, ovvero $2x - y = 0$.

Il fascio di piani perpendicolare a s è dunque $x + 2y - z = \alpha$ al variare di α . Imponendo il passaggio per P ottengo $\alpha = 5$; la retta r_1 è quindi contenuta nel piano $x + 2y - z = 5$, la cui intersezione con s è il punto

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + y + 3z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \implies (1, 2, 0).$$

Quindi r_1 è la retta passante per $(5, 0, 0)$ e $(1, 2, 0)$, cioè $r_1 : (5, 0, 0) + \langle(2, -1, 0)\rangle$. Analogamente, imponendo il passaggio per Q ottengo il piano $x + 2y - 3z = -1$, la cui intersezione con s è il punto

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \implies (0, 0, 1).$$

Quindi r_2 è la retta $r_2 : (-1, 0, 0) + \langle(1, 0, 1)\rangle$.

Il piano π ha equazione $(0, 0, 1) + \langle(1, 2, -1), (1, 0, 1)\rangle$; un vettore ortogonale sia a $(1, 2, -1)$ che $(1, 0, 1)$ è $(1, -1, -1)$, quindi il piano π ha equazione $x - y - z = \alpha$; imponendo il passaggio per $(0, 0, 1)$ ottengo $\alpha = -1$, quindi il piano $\pi : x - y - z = -1$. Un punto di r_1 che non appartiene a π è $(5, 0, 0)$. La retta per $(5, 0, 0)$ perpendicolare a π è $(5, 0, 0) + \langle(1, -1, -1)\rangle$ ovvero la retta

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

la cui intersezione con π è

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 5 \\ x - y - z = -1 \end{cases} \implies (3, 2, 2)$$

perciò la retta cercata è $(1, 2, 0) + \langle(1, 0, 1)\rangle$. $\square$

Esercizio 5 (4 punti). Sia $W = \langle(1, 2, 1), (1, 1, 2)\rangle$ e sia $V : x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

- (a) Trovare un sistema che abbia come soluzione W .
- (b) Trovare una base ortonormale di W .
- (c) Trovare $V \cap W$.

Soluzione. Il sistema ha una sola equazione, che è $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Una base ortonormale è $\{(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (1/\sqrt{54}, -4/\sqrt{54}, 7/\sqrt{54})\}$. L'intersezione tra W e V ha dimensione 1 ed è generata da $(0, 1, -1)$. $\square$

Esercizio 6 (2 punti). Calcolare $\left(\frac{1}{1+i}\right)^5$, esprimendo il risultato nella forma $a + ib$.

Svolgimento. $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$ quindi

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+i} \right)^5 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos(-5\pi/4) + i \sin(-5\pi/4)) = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)) = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{8} + i \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

□