FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
19 GIUGNO 2014
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
INGEGNERIA DEI PROCESSI INDUSTRIALI E DEI MATERIALI

1. Teoria

Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate, fornendo una dimostrazione o un controesempio. Risposte incomplete non saranno prese in considerazione.

Esercizio 1. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$. Supponiamo che V abbia dimensione 4, che U e W abbiano entrambi dimensione 2 e che $U \cap W$ abbia dimensione 1. Siano v un generatore di $U \cap W$, e si scelgano u e w in U e W, rispettivamente, in modo tale che $u \notin U \cap W$ e $w \notin U \cap W$. Mostrare che $\{v, u, w\}$ è una base di $U + W$.

Esercizio 2. Dimostrare che un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in m incognite ammette come soluzioni un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ se e solo se il sistema è omogeneo.

Esercizio 3. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita. Dire cosa significa che U e W sono in somma diretta. Nel caso in cui $U \oplus W = V$, dimostrare che ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di un vettore di U e di un vettore di W.

Esercizio 4. Nel caso in cui $W = U^\perp$, definire la proiezione ortogonale $p_U^\perp : V \to V$ su U. Supponiamo che V abbia dimensione 5, U abbia dimensione 3, generato da u_1, u_2, u_2 e W abbia dimensione 2, generato da w_1, w_2: si scriva la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale $p_U^\perp$ rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_2, w_1, w_2\}$ di V.

2. Esercizi

Esercizio 1 (8 punti)**.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, considerare il seguente sistema lineare:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = a \\ x_2 + (a-1)x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + (a^2 - a - 2)x_4 = a^2 \end{cases}$$

(a) Discutere la risolubilità del sistema per tutti i valori di a.
(b) Per tutti i valori di a per i quali il sistema Σ_a è risolubile, calcolarne la soluzione.
(c) Indicata con V la soluzione di Σ_0, e posto $W = \langle(1,0,0,1), (2,1,-1,2)\rangle$, determinare la dimensione ed una base di $V \cap W$. Determinare inoltre la dimensione di $V + W$ e completare la base di $V \cap W$ precedentemente determinata ad una base di $V + W$.
(d) Trovare la cui proiezione ortogonale su W di un vettore $w \in \langle(1,1,1,1)\rangle$.

Proof. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & (a-1) & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & (a^2-a-2) & a^2 \end{pmatrix}.$$

Applicando la riduzione di Gauss si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a(a-2) \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice incompleta è 4 se e solo se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ (si calcoli, ad esempio, il suo determinante). Quindi, per RC, risulta che se $a \neq 0$ e $a \neq 1$, il sistema ammette un'unica soluzione, che si determina ricorsivamente per sostituzione. Nel caso in cui $a = 1$, il rango della matrice incompleta è 3, mentre quello della completa è 4, quindi il sistema non ha soluzione. Per $a = 0$, il sistema è omogeneo e il rango della matrice incompleta è 2, quindi la soluzione è un sottospazio, V, di dimensione 2. Un semplice calcolo per sostituzione mostra che $V = \langle (3,-1,-1,0), (1,0,0,1) \rangle$.

Chiaramente, $(2,1,-1,2)$ non appartiene a V, visto che non soddisfa una delle due equazioni di Σ_0, ovvero $x_2 - x_3 = 0$. Invece, $(1,0,0,1)$ appartiene a Σ_0. Questo basta a concludere che $\dim(V \cap W) = 1$ ed una base di $V \cap W$ è $(1,0,0,1)$. Visto che l'intersezione ha dimensione 1, la somma $V + W$ ha dimensione 3, ed una sua base si ottiene prendendo un vettore di V ed uno di W che non appartengono all'intersezione; una base di $V + W$ è quindi $\{(1,0,0,1), (3,-1,-1,0), (2,1,-1,2)\}$.

Per l'ultimo punto, noto che una base ortogonale di W è data da

$$(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

ed un vettore qualunque di $\langle (1,1,1,1) \rangle$ è (t,t,t,t). Basta quindi calcolare

$$((t,t,t,t) \cdot (1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}))(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}) +$$
$$+((t,t,t,t) \cdot (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0))(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0).$$

Svolgendo i calcoli, ottengo

$$p_W^{\perp}(t,t,t,t) = (t,0,0,t) + (0,0,0,0) = (t,0,0,t).$$

□

Esercizio 2 (8 punti)**.** Sia $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine tridimensionale standard sui numeri reali, dotato del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Sia r la retta di equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

Sia inoltre π il piano ortogonale alla retta r e passante per il punto $P = (1,2,1)$.

(a) Determinare le equazioni cartesiane del piano π.
(b) Trovare le equazioni cartesiane della retta q passante per il punto P e parallela al vettore $(1,1,0)$. Dimostrare che la retta q è contenuta nel piano π.
(c) Indicato con R il punto di intersezione tra r e π, determinare tutti i punti di q a distanza 3 da R.

(d) Trovare le due rette sghembe s e t la cui retta di minima distanza sia r e passanti per i punti $P = (1, 2, 1)$ e $Q = (0, 0, 0)$, rispettivamente.

Svolgimento. La direzione della retta r si trova svolgendo il sistema omogeneo associato, la cui soluzione è il sottospazio generato dal vettore $(1, -1, 2)$. Risulta quindi chiaro che il piano cercato è del tipo $\pi : x - y + 2z = d$. Imponendo il passaggio per P ottengo $d = 1$, quindi

$$\pi : x - y + 2z = 1.$$

Le equazioni parametriche di q sono $(1, 2, 1) + \langle(1, 1, 0)\rangle$. Un sistema omogeneo la cui soluzione sia $(1, 1, 0)$ è dato dalle equazioni $x - y = 0$ e $z = 0$, quindi le equazioni cartesiane di q sono, sostituendo le coordinate di P,

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Il fatto che q sia contenuta in π si vede facilmente notando che $P \in \pi$ e il vettore $(1, 1, 0)$ appartiene al sottospazio direttore di π. Oppure, notando che π appartiene al fascio di piani per q, visto che $\pi : (x - y + 1) + 2(z - 1) = 0$.

L'intersezione di r con π si ottiene risolvendo il sistema

$$R : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} .$$

Sottraendo la seconda e la terza equazione ottengo $3z = -1$, ovvero $z = -1/3$. Sostituendo $y = 1 - x$ nella seconda equazione ottengo $2x - 1 = 2 - 1/3$ quindi $x = 4/3$ e $y = -1/3$. Quindi $R = (4/3, -1/3, -1/3)$. Il punto generico di q è $(1 + t, 2 + t, 1)$ e quindi dobbiamo imporre che sia verificata l'equazione

$$(1 + t - 4/3)^2 + (2 + t + 1/3)^3 + (1 + 1/3)^3 = 9$$

le cui soluzioni sono $t = -6 \pm \sqrt{11/6}$.

Per l'ultimo punto, noto che le due rette appartengono al fascio di piani paralleli ortogonali alla retta r, il cui spazio direttore è quindi lo spazio direttore di π, ovvero $\langle(1, 1, 0), (0, 2, 1)\rangle$. Quindi s appartiene a π, mentre t appartiene al piano $x - y + 2z = d$ passante per $(0, 0, 0)$, ovvero al piano

$$\sigma : x = y + 2z = 0.$$

I punti di intersezione di tali piani con r sono $R = r \cap \pi$ ed il punto $S = r \cap \sigma$ ottenuto come soluzione del sistema

$$S : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

da cui segue facilmente che S è il punto $(7/6, -1/6, -2/3)$. Le due rette sono quindi quelle di equazioni parametriche

$$s : (1, 2, 1) + \langle(4/3, -1/3, -1/3) - (1, 2, 1)\rangle$$
$$t : (0, 0, 0) + \langle(7/6, -1/6, -2/3)\rangle.$$

$\square$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti reali.

(a) Dimostrare che $\{X, X^2, 1-X, X^3-X^2\}$ è una base di V.

(b) Sia $f_a : V \to V$, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo di V definito dalle seguenti condizioni:

$$f(X) = 2X+2; \quad f(X^2) = aX^2+X+1; \quad f(1-X) = 0; \quad f(X^3-X^2) = X^3-X^2.$$

Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\{1, X, X^2, X^3\}$ di V.

(c) Dire se f è un isomorfismo e, in caso contrario, calcolare il nucleo e l'immagine di f.

(d) Discutere la diagonalizzabilità di f_a al variare del parametro a.

(e) Per $a = 0$, trovare una base di autovettori ed una matrice diagonale D che sia simile ad A.

Svolgimento. I quattro vettori sono linearmente indipendenti, visto che

$$aX + bX^2 + c(1 - X^2) + d(X^3 - X^2) = 0$$

implica

$$c + aX + (b - d - c)X^2 + dX^3 = 0$$

e dunque $a = b = c = d = 0$. Si ha:

$$f_a(1) = f(1 - X + X) = 0 + 2X + 2 = 2X + 2$$

$$f_a(X^3) = f_a(X^3 - X^2 + X^2) = X^3 - X^2 + aX^2 + X + 1 = X^3 + (a-1)X^2 + X + 1$$

quindi la matrice richiesta risulta

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente f_a non è mai un isomorfismo, visto che $f_a(1-X) = 0$. Se $a = 0$, la sua immagine ha dimensione 2, visto che la matrice A_0 ha rango 2, ed è

$$\langle 1 + X, 1 + X - X^2 + X^3 \rangle.$$

Il nucleo ha quindi dimensione 2, ed è generato da $1 - X$ e $2X - X^2$. Se $a \neq 0$, il rango della matrice è 3 e quindi il nucleo ha dimensione 1, generato da $(1 - X)$, mentre l'immagine è generata da tre colonne indipendenti, ovvero

$$\langle 1 + X, 1 + X + aX^2, 1 + X + (a-1)X^2 + X^3 \rangle.$$

Il polinomio caratteristico di A_a si trova facilmente come

$$\det \begin{pmatrix} 2-t & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2-t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-t & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(a-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= (t-a)(t-1)(4+t^2-4t-4) = (t-a)(t-1)(t^2-4t) = t(t-a)(t-1)(t-4)$$

che ha quattro radici, eventualmente non distinte, 0, a, 1, 4. Se $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$, allora f_a è diagonalizzabile. Esaminiamo i casi critici:

Caso $a = 0$. In questo caso, le radici sono: $t = 0$ (con molteplicità algebrica 2), $t = 1$ e $t = 4$, le ultime due con molteplicità algebrica 1. Quindi A è diagoanalizzabile se e solo se il nucleo di f ha dimensione 2. Quindi, visto il calcolo precedente,

f è diagonalizzabile. Gli autovettori relativi agli autovalori 1 e 4 sono $X^3 - X^2$ e $1 + X$. Una base di autovettori è quindi

$$\{1 - X, 2X - X^2, X^3 - X^2, 1 + X\}$$

ed una forma diagonale della matrice A è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Caso $a = 1$. In questo caso, la radice di molteplicità algebrica 2 è 1. La matrice $A_1 - 1$ è

$$A_1 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi f_1 è ancora diagonalizzabile.

Caso $a = 4$. In questo caso la radice di molteplicità algebrica 2 è 4. La matrice $A_4 - 4$

$$A_a = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 3, quindi f_4 non è diagonalizzabile. □

Esercizio 4 (4 punti)**.** Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi, con unità immaginaria i fissata. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, e sia $P(X)$ il suo polinomio caratteristico.

(a) Sapendo che due delle soluzioni dell'equazione $P(X) = 0$ sono $\sqrt{2}i$ e $3i$, determinare la fattorizzazione di f sia in $\mathbb{R}[X]$ che in $\mathbb{C}[X]$.
(b) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $P(X) = 11X^2$.
(c) Dire, giustificando la risposta, se $f : V \to V$ è un isomorfismo e se f è diagonalizzabile.

Svolgimento. Poichè P ha coefficienti reali, è di grado 4, e due sue radici sono $\sqrt{2}i$ e $3i$, la sua fattorizzazione a coefficienti in $\mathbb{C}$ è

$$P(X) = (X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)(X - 3i)(X + 3i)$$

quindi, multiplicando i fattori che contengono radici coniugate, la sua fattorizzazione in $\mathbb{R}$ è

$$P(X) = (X^2 + 2)(X^2 + 9).$$

Risulta quindi $P(X) = X^4 + 11X^2 + 18$, quindi l'equazione proposta è

$$X^4 = -18$$

le cui soluzioni, visto che $-18 = 18(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$ sono

$$\zeta_k = \sqrt[4]{18}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right)$$

per $k = 0, 1, 2, 3$.

Infine, visto che 0 non è un autovalore di f, risulta che f ha nucleo nullo e quindi è un isomorfismo. Infine, non essendo $P(X)$ fattorizzabile completamente in $\mathbb{R}$, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile. $\square$