FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
9 SETTEMBRE 2014
INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
INGEGNERIA DEI PROCESSI INDUSTRIALI E DEI MATERIALI

1. Teoria

Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate, fornendo una dimostrazione o un controesempio. Risposte incomplete non saranno prese in considerazione.

Domanda 1. Sia $V := \mathbb{R}^5$, dotato del prodotto scalare standard, e sia W un suo sottospazio di dimensione 3. Sia $\pi : V \to V$ la proiezione ortogonale su W. Determinare la dimensione del nucleo di π, scrivere una matrice che rappresenta π rispetto ad un'opportuna base di $\mathbb{R}^5$, e dire se π è diagonalizzabile.

Domanda 2. Dire quando m vettori $v_1, \dots, v_m$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti. Dimostrare o trovare un controesempio a ciascuna delle seguenti affermazioni:

(i) Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali e i vettori $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

(ii) Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali e $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono ancora linearmente indipendenti.

(iii) Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali e $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono ancora linearmente indipendenti.

Svolgimento. (i) è vera: sia $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ una combinazione lineare nulla dei vettori v_i. Allora $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m) = 0$. Per ipotesi i $f(v_i)$ sono indipendenti, quindi $\lambda_i = 0$ per ogni i. Segue che i vettori v_i sono indipendenti dalla definizione di lineare indipendenza.

(ii) è vera. Sia $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m) = 0$ una combinazione lineare nulla dei vettori $f(v_i)$. Per linearità, $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) = 0$. Usando l'iniettività di f, otteniamo che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$. Usando che i v_i sono indipendenti, otteniamo che tutti i λ_i sono nulli. Segue che $f(v_i)$ sono indipendenti,

(iii) è falsa. Costruiamo un controesempio. Supponiamo che la dimensione di V sia maggiore o uguale a 2 e che f non sia iniettiva (ovvero $\ker(f) \neq 0$). Prendo un vettore $v \neq 0$ in $\ker(f)$ e $w \in V$ tale che $w \notin \langle v \rangle$. Allora v e $v+w$ sono indipendenti (dimostrarlo per esercizio) e $f(v) = f(v + w)$. □

Domanda 3. Dimostrare che due autospazi relativi a due autovalori distinti di un endomorfismo $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale V sono in somma diretta.

Domanda 4. (i) Dare la definizione di autovalore e di autovettore di un endomorfismo.

(ii) Dare la definizione di poliniomio caratteristico di un endomorfismo.

(iii) Dimostrare che se λ è una radice del poliniomio caratteristico, allora esiste almeno un autovettore di autovalore λ.

Domanda 5. Dimostrare che le soluzioni di un sistema lineare Σ sono date da $\bar{x} + V$ dove $\bar{x}$ è una soluzione qualunque del sistema e V è la soluzione del sistema omogeneo associato a Σ.

2. Esercizi

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, considerare il seguente sistema lineare:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + (a-1)x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + a(a-1)x_4 = (a-1)^2 \end{cases}$$

(a) Discutere la risolubilità del sistema per tutti i valori di a.
(b) Per tutti i valori di a per i quali il sistema Σ_a è risolubile, calcolarne la soluzione.

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a(a-1) & (a-1)^2 \end{pmatrix}$$

ed il metodo di Gauss ci restituisce la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a(a-2) \end{pmatrix}$$

e quindi se $a \neq 0, 1$ la soluzione del sistema è unica (e si determina tramite semplice sostituzione a partire dalla matrice a scalini, per cui $x_4 = (a-2)/(a-1)\dots$). Se $a = 0$ otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che il rango della matrice completa ed incompleta è 3. Perciò il sistema ha soluzione, ed il nucleo dell'applicazione lineare associata ha dimensione 1 $(= 4 - 3)$. Il nucleo dell'applicazione si ottiene risulvendo il sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

e risulta $\langle (2, -1, -1, 0) \rangle$ mentre una soluzione particolare è $(-3, 1, 0, 1)$. Quindi le soluzioni sono la varietà lineare $(-3, 1, 0, 1) + \langle (2, -1, -1, 0) \rangle$. Se $a - 1$ otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che il rango della matrice incompleta è 3, mentre quello della completa è 4; quindi in questo caso il sistema non ha soluzione. □

Esercizio 2. (a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f(1,1,1) = (2a, 2a, -2); \quad f_a(1,-1,0) = (0,-4,0);$$

$$f_a(-1,1,2) = (0,4a,4); \quad f_a(1,2,1) = (0,3,-4).$$

Verificare quindi che esiste un solo valore di a che verifica la precedente richiesta.

(b) Per il valore di a per il quale f_a esiste, scrivere la matrice A_a di f_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Per il valore di a per il quale f_a esiste, dire se f_a è iniettiva o suriettiva, determinando dimensione e base di nucleo ed immagine.

(d) Per il valore di a per il quale f_a esiste, indicare con V l'immagine di f_a. Sia W il sottospazio degli elementi $(x_1, x2, x_3)$ di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$W : x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Trovare dimensione e base di $V \cap W$ e completare la base di $V \cap W$ trovata ad una base di $V + W$.

Svolgimento. I vettori $(1,1,1)$, $(1,-1,0)$ e $(-1,1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Per convincersene, basta notare che possiamo esprimere la base canonica come combinazione lineare di questi vettori. Semplici calcoli forniscono:

$$(0,0,1) = \frac{1}{2}(-1,1,2) + \frac{1}{2}(1,-1,0);$$

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) - \frac{1}{2}(0,0,1) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) - \frac{1}{4}(-1,1,2) - \frac{1}{4}(1,-1,0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{4}(1,-1,0) - \frac{1}{4}(-1,1,2);$$

$$(0,1,0) = (1,1,1) - (1,0,0) - (0,0,1) =$$

$$= (1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,1) - \frac{1}{4}(1,-1,0) + \frac{1}{4}(-1,1,2) - \frac{1}{2}(-1,1,2) - \frac{1}{2}(1,-1,0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,1,1) - \frac{3}{4}(1,-1,0) - \frac{1}{4}(-1,1,2).$$

Alternativamente, potevo controllare che i vettori fossero linearmente indipendenti. Noto ora che il vettore $(1,2,1)$ si scrive come:

$$(1,2,1) = (1,1,1) + (0,1,0) = (1,1,1) + \frac{1}{2}(1,1,1) - \frac{3}{4}(1,-1,0) - \frac{1}{4}(-1,1,2) =$$

$$= \frac{3}{2}(1,1,1) - \frac{3}{4}(1,-1,0) - \frac{1}{4}(-1,1,2)$$

dunque, affichè f_a esista, deve essere verificata la seguente uguaglianza:

$$f_a(1,2,1) = \frac{3}{2}f_a(1,1,1) - \frac{3}{4}f_a(1,-1,0) - \frac{1}{4}f_a(-1,1,2)$$

e sostituendo risulta:

$$(0, a+2, 1) = \frac{3}{2}(2a, 2a, -2) - \frac{3}{4}(0,-4,0) - \frac{1}{4}(0, 4a, 4)$$

ovvero, moltiplicando tutto per 4,

$$(0,3,-4) = (3a, 3a, -3) - (0,-3,0) - (0, a, 1)$$

ovvero

$$(0,3,-4) = (3a-3, 2a+3, -4).$$

Questa uguaglianza è verificata solo per $a = 0$. Quindi, f_a esiste se e solo se $a = 0$. In questo caso, otteniamo tramite una semplice sostituzione (ponendo per semplicità $f = f_0$):

$$f(0,0,1) = \frac{1}{2}(0,0,4) + \frac{1}{2}(0,-4,0) = (0,-2,2);$$

$$f(1,0,0) = \frac{1}{2}(0,0,-2) + \frac{1}{4}(0,-4,0) - \frac{1}{4}(0,0,4) = (0,-1,-2);$$

$$f(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,0,-2) - \frac{3}{4}(0,-4,0) - \frac{1}{4}(0,0,4) = (0,3,-2).$$

La matrice associata ad f risulta quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè il rango di A è 2, la dimensione dell'immagine è 2, ed una sua base e' $\{(0,1,2),(0,2,1)\}$. Il nucleo quindi ha dimensione 1, generato da $(1,3,4)$.

Chiaramente $V = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$, quindi un generico vettore di V è nella forma $(0,a,b)$. Per verificare l'equazione di W impongo che $a-b=0$ ovvero $a=b$. Quindi $V \cap W$ ha dimensione 1, generato da $(0,1,1)$. Segue che $V+W$ ha dimensione 3 (formula di Grassmann), quindi coincide con $\mathbb{R}^3$, e completando una base di $V \cap W$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ ottengo ad esempio la base $\{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$.

□

Esercizio 3. Sia A_a la matrice:

$$A_a = \begin{pmatrix} -a(a-1) & a(a-1) & -a(a-1) & 0 \\ -a(a-1) & a(a-1) & a^2-a+1 & a(a+1) \\ 0 & 0 & 1 & a(a+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Discutere la diagonalizzabilità di A_a.
(b) Trovare una base di autovettori per A_0.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è (dopo un facile calcolo) $t^2(t-1)^2$. Quindi gli autovalori sono 0 e 1, entrambi con molteplicità algebrica 2. Quindi, gli autospazi relativi a tali autovalori devono avere entrambi dimensione 2 affinchè A_a sia diagonalizzabile. Quindi, le matrici A_a e $A_a - 1$ devono avere entrambe rango $4-2=2$.

La matrice A_a ha rango 2 se e solo se $a(a-1)=0$, ovvero se e solo se $a=0$ e $a-1$. La matrice $A_a - 1$ è

$$A_a = \begin{pmatrix} -a^2+a-1 & a(a-1) & -a(a-1) & 0 \\ -a(a-1) & a^2-a-1 & a^2-a+1 & a(a+1) \\ 0 & 0 & 0 & a(a+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chiaramente, $-a^2+a-1$ (prima entrata in alto a sinistra) è sempre $\neq 0$, per ogni $a \in \mathbb{R}$. Calcolo il determinante della matrice ottenuta dalle prime due colonne e le prime due righe:

$$\det \begin{pmatrix} -a^2+a-1 & a(a-1) \\ -a(a-1) & a^2-a-1 \end{pmatrix} = 1-(a^2-a)^2 - a^2(a-1)^2 = 1$$

da cui segue che le prime due colonne sono sempre linearmente indipendenti. Affinchè la matrice abbia rango 2 deve allora essere $a(a+1)=0$, ovvero $a=0$ oppure $a=-1$. Quindi A_a è diagonalizzabile se e solo se $a=0$.

Se $a=0$ la matrice diventa:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi V_0 è generato dai primi due vettori della base canonica, $(1,0,0,0)$ e $(0,1,0,0)$, mentre un facile calcolo mostra che V_1 è generato da $(0,1,1,0)$ e e $(0,0,0,1)$. □

Esercizio 4. Nello spazio affine standard $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, considerare le due rette

$$r : \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=1 \end{cases} , \qquad s := \begin{cases} x=0 \\ y-z=-1 \end{cases} .$$

(a) Stabilire la posizione reciproca di r ed s (sghembe, parallele, incidenti).
(b) Trovare la distanze di r ed s, la retta di minima distanza t ed i punti di minima distanza P in r e Q in s.
(c) Trovare il piano π parallelo ad entrambe le rette r ed s ed equidistante da esse.
(d) Trovare la proiezione ortogonale del punto $P \in r$ di minima distanza determinato precedentemente su π. Indicare con A tale punto.
(e) Dopo aver verificato che il punto $B=(1,0,0)$ appartiene a π, trovare il luogo dei punti del piano π equidistandi da A e B.

Svolgimento. Le equazioni parametriche delle rette sono $r:(1,1,0)+\langle(1,1,1)\rangle$ e $s:(0,0,1)+\langle(0,1,1)\rangle$. Le rette non sono quindi parallele e il sistema

$$r : \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=1 \\ x=0 \\ y-z=-1 \end{cases} .$$

non ha soluzione. Sono quindi sghembe. Un punto generico di r è, al variare del parametro t, dato da $(1+t,1+t,t)$ mentre un punto generico di s è $(0,q,1+q)$ (al variare del parametro q). Quindi un vettore generico che congiunge r ad s è del tipo $(1+t,1+t-q,t-1-q)$. Imponendo che questo vettore sia ortogonale ai sottospazi direttori di r ed s ottengo $q = t = -1$, e quindi i punti di minima distanza risultano (sostituendo) $P = (0, 0, -1)$ e $Q = (0, -1, 0)$. La loro distanza è $\sqrt{2}$, e la retta di minima distanza è $t : (0, 0, -1) + \langle(0, 1, -1)\rangle$, ovvero

$$t : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} .$$

Il piano parallelo ad r ed s ha direzione $\langle(1, 1, 1), (0, 1, 1)\rangle$ e quindi, imponendo le condizioni di passaggio, ha equazione cartesiana del tipo $y - z + a = 0$ per qualche a (oppure, notare che la direzione di t è $(0, 1, -1)$. Calcolo la distanza di questo piano generico dai punti $(1, 1, 0) \in r$ e $(0, 0, 1) \in s$, ottenendo $\frac{|1+a|}{\sqrt{2}}$ e $\frac{|-1+a|}{\sqrt{2}}$ rispettivamente. Uguagliando le distanze, ottengo l'equazione $|1 + a| = |1 - a|$, la cui unica soluzione è $a = 0$. Il piano richiesto è quindi $y - z = 0$.

La proiezione richiesta si ottiene intersecando t con π (visto che, per costruzione, t passa per P ed è parallela a π. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

che ha come soluzione il punto $A = (0, 1/2, 1/2)$. Un punto generico di π è della forma (a, b, b) al variare di a e b. Imponendo che le distanze di questo punto generico da A e B siano uguali ottengo il sistema

$$a^2 + (b - 1/2)^2 + (b - 1/2)^2 = (a - 1)^2 + b^2 + b^2.$$

Sviluppando i calcoli, ottengo: $2b + 1/2 = -2a + 1$, ovvero $b = -a + 1/4$. I punti richiesti sono tutti e soli quelli della forma $(a, -a + 1/4, -a + 1/4)$, che formano quindi la retta $(0, -1/4, -1/4) + \langle(1, -1, -1)\rangle$. □

Esercizio 5. Trovare l'inversa della matrice a coefficienti complessi $\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 5+i \end{pmatrix}$, esprimendo la soluzione con entrate nella forma $a+ib$ (dove al solito i indica l'unità immaginaria).

Svolgimento. Il determinante della matrice è

$$5 + i - (2 + i)(2 - i) = 5 + i - (4 - i^2) = 5 + i - (4 + 1) = i,$$

quindi la matrice è invertibile. La sua inversa si calcola facilmente: la matrice dei complementi algebrici è $\begin{pmatrix} 5+i & -2+i \\ -2-i & 1 \end{pmatrix}$, e la sua trasposta è $\begin{pmatrix} 5+i & -2-i \\ -2+i & 1 \end{pmatrix}$; dividendo per il determinante ottengo la matrice $\begin{pmatrix} 5/i+1 & -2/i-1 \\ -2/i+1 & 1/i \end{pmatrix}$. Tenendo conto che $1/i = -i$ e sostituendo ottengo la matrice inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-5i & -1+2i \\ 1+2i & -i \end{pmatrix},$$

la matrice inversa di A. □