ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
ESERCITAZIONI IN CLASSE
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA
A.A. 2011-2012, DOCENTE: M. LONGO

Di seguito trova una traccia di quanto fatto durante le ore di *Esercitazioni* (Martedì e Mercoledì dalle 12:15 alle 13:15). Gli *Esercizi proposti* sono quelli consigliati come esercizio, gli *Esercizi svolti* sono quelli che abbiamo svolto o discusso in classe.

Tutti i riferimenti sono al libro ti testo: Cantarini-Chiarellotto-Fiorot, *Un corso di Matematica*, Ed. Libreria Progetto, Padova. Leggere gli svolgimenti proposti nel libro e confrontarli con quanto fatto in classe.

Settimana I: Capitolo 2, Spazi Vettoriali.

Esercizi svolti. Esempio 2.4.3 e Osservazione successiva. Si è poi completato l'esempio mostrando che il sottoinsieme $\mathbb{R}[X]^{\leq n}$ di $\mathbb{R}[X]$ costituito dai polinomi di grado al massimo n (intero non-negativo) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[X]$.

Settimana II: Capitolo 3, Combinazioni Lineari e Sottospazi.

Esercizi proposti. Numeri: 3.4.1; 3.4.3; 3.4.4; 3.4.6; 3.4.7; 3.5.1; Esempio 3.4.1, Numero 5.

Esercizi svolti. 3.4.1 e 3.5.1 (inserendo commenti su dipendenza ed indipendenza lineare).

Settimana III: Capitolo 4, Basi e dimensioni.

Esercizi proposti. 4.3.1; 4.2.12; 4.3.1; 4.3.6; 4.3.7.

Esercizi svolti. 4.3.1; 4.3.5; 4.3.7; Mostrare che

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y; x + y - z = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base.

Settimana IV: Capitolo 5, Somma diretta e dimensione di sottospazi; Capitolo 6, Applicazioni Lineari e Matrici.

Esercizi proposti. 5.4.2; 5.4.3; 5.4.5; 5.5.2.

Esercizi svolti. 5.4.2 iv); 5.4.5; 6.2.3; 6.4.1 i), ii), iii); 6.4.7 i); 6.4.8 i).

Settimana V: Capitolo 6, Applicazioni Lineari e Matrici.

Esercizi proposti. 6.4.2; 6.4.7; 6.4.8; 6.4.9.

Esercizi svolti. 6.4.3; 6.4.9; Data $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita sulla base canonica dalle condizioni

$$f(1,0,0,0) = (1,0,1); \quad f(0,1,0,0) = (0,0,1)$$

$$f(0,0,1,0) = (-1,0,2); \quad f(0,0,0,1) = (0,0,0)$$

si calcoli $f(1,2,1,1)$, $\ker(f)$ e $\mathrm{im}(f)$.

Settimana VI-VII: Capitolo 7, Sistemi lineari.

Esercizi proposti. 7.3.5; 7.3.6; 7.4.2; 7.4.3.

Esercizi svolti. 7.3.6; la seguente variazione del 7.3.6: Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 4}$, $W = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ e sia L l'applicazione lineare definita sulla base $\{1, X, X^2, X^3\}$ di V e sulla base $\{1, X, X^2\}$ di W dalle seguenti condizioni:

$$\begin{array}{lcl} L(1) & = & 1 + aX \\ L(X) & = & -1 + aX - aX^2 \\ L(X^2) & = & 0 \\ L(X^3) & = & 2 - 2X + (a+1)X^2 \end{array}$$

dove a è un parametro reale. Si discuta, al variare dei parametri reali a, b, c, quando il vettore $b + cX + aX^2$ appartiene all'immagine di L.

Settimana VIII: Capitolo 8, Matrici, e §9.1, §9.2 del Capitolo 9, Determinante, Cambiamenti di Base.

Esercizi proposti. 8.3.1; 8.3.3; 9.5.3; 9.5.4; 9.5.5; 9.6.1. Si consiglia di farne il maggior numero possibile per acquisire dimestichezza con i calcoli.

Settimana IX: Capitolo 1, §1.4, I numeri complessi.

Esercizi proposti. 1.5.3; 1.5.4; 1.6.2; 1.6.3.

Esercizi svolti. 1.5.4.

Settimana X: Capitolo 10, Matrici diagonalizzabili.

Esercizi proposti. Calcolare il polinomio caratteristico $P_A(t)$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trovare tutte le radici del polinomio caratteristico $P_A(t)$ e gli autovalori della matrice A (che, ricordo, sono le radici reali del polinomio caratteristico). Dopo aver verificato che c'è un solo autovalore $t = 3$, calcolare l'autospazio V_3 di $\mathbb{R}^3$ relativo all'autovalore 3, e verificare che V_3 ha dimensione 1.

Esercizi svolti. Quello proposto e 11.5(i).

Settimana XI: Capitolo 10, Matrici diagonalizzabili.

Esercizi proposti. Al variare del parametro reale a, si consideri l'endomorfismo $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni:

$$L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad L_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \qquad L_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - a^2 \\ 2 \\ a - 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Dopo aver espresso il vettore $(0,0,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(1,1,1)$, si calcoli $L_a\big((0,0,1)\big)$.
(2) Si scriva la matrice A_a di L_a rispetto alla base canonica
$$\mathcal{C} := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
di $\mathbb{R}^3$.
(3) Per $a = 0$, si calcoli il nucleo $\ker(L_0)$ di L_0 e l'immagine $\operatorname{im}(L_0)$ di L_0.
(4) Si dica per quali valori del parametro a la matrice A_a è diagonalizzabile.
(5) Dopo aver verificato che per $a = 2$ la matrice A_2 è diagonalizzabile, si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_2.
(6) Si determinino una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che $H^{-1}A_2H = D$.

Esercizi svolti. 10.2.6 e l'esercizio proposto.

Settimana XII: Capitolo 12, Concetti metrici.

Esercizi proposti. 12.2.9; 12.2.5; 12.2.8; Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(1) Si calcoli la dimensione di U e se ne trovi una base.
(2) Si determini l'ortogonale $U^\perp$ di U.
(3) Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$.
(4) Sia $p_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ su U. Si esibisca una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di p_U è:
$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(5) Si trovi la matrice A della proiezione ortogonale $p_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ su U rispetto alla base canonica $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^4$.
(6) Si trovi una matrice H tale che $D = H^{-1}AH$, dove la matrice A è definita nel punto (5) mentre la matrice D è definita nel punto (4).

Esercizi svolti. Tutti quelli proposti.

Settimana XIII: Ripasso.

Esercizi svolti. 11.4.

Settimana XIV: Capitolo 14, Spazi affini.

Esercizi proposti. 14.3.3; 14.3.4.

Esercizi svolti. 14.3.3; 14.3.4; 14.3.4;

Settimana XV: Capitolo 16, Spazi metrici.

Esercizi proposti. 16.5.1; 16.5.2; 16.5.3; 16.5.4; 16.5.5; Sia $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ lo spazio affine di dimensione 3. Sia r la retta passante per il punto $P = (1, -1, 1)$ e parallela al sottospazio $U = \langle (1, 2, 1) \rangle$. Sia inoltre s la retta di equazione cartesiana

$$s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 4z - 11 = 0 \end{cases}$$

Sia infine π il piano di equazione cartesiana

$$\pi : x + y + z - 1 = 0.$$

(1) Si determini la posizione reciproca di r ed s.
(2) Si determinino la distanza tra le due rette, i punti di minima distanza e la retta di minima distanza.
(3) Si determini la proiezione ortogonale di r sul piano π, definita come la retta che si ottiene intersecando π con il piano contenente r e parallelo all'ortogonale del sottospazio direttore di π.