**FALG – ICM**
**16 FEBBRAIO 2021**

M. LONGO

Tutti gli esercizi valgono 5 punti.

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al massimo 2. Dire per quali valori di $a, b, c$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to V$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $f(1, 0, 1) = X^2 + 1$;
- $f(1, 1, 0) = 1 - X$;
- $f(1, 0, 0) = X^2 - X + 2$;
- $f(3, 1, 1) = aX^2 + bX + c$.

Per tali valori di $a, b, c$, determinare la matrice di $f$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ ed alla base $\{1, X, X^2\}$ di $V$. Determinare infine una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{im}(f)$, nucleo e immagine di $f$, rispettivamente.

**Esercizio 2.** Discutere e risolvere in tutti i casi in cui esista una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2z = -2 \\ -2x - y - (a^2 + 2a + 3)z = -a^2 + a - 3 \end{cases}.$$

**Esercizio 3.** Sia $\pi$ il piano di equazione $\pi : x + y + z = 1$ e sia $r$ la retta passante per il punto $(3, -1, 1)$ e parallela la vettore $(1, 0, 1)$. Determinare la proiezione ortogonale di $r$ su $\pi$. Posto $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, trovare i quadrati di lato $P - Q$ contenuti in $\pi$.

**Esercizio 4.** Al variare del parametro $a$, sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$,

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Determinare per $a = 1$ gli autospazi di $A_1$ e discutere la diagonalizzabilità di $f_a$ al variare del parametro $a$.

**Esercizio 5.** Definire i sottospazi $U = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 0, -2, -1) \rangle$ e

$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}.$$

Trovare dimensione e base di $U \cap W$ e $U + W$.

**Esercizio 6.** Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n$ e $f : V \to V$ un endomorfismo. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$ tale che i primi $r$ vettori $\{v_1, \ldots, v_r\}$ formino una base del nucleo $\ker(f)$ di $f$. Dimostrare che la dimensione dell'immagine di $f$ $\mathrm{im}(f)$ è $n - r$ (se si utilizza la formula $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$, se ne deve fornire una dimostrazione).

Indichiamo con $P_f$ il polinomio caratteristico di $f$. Supponiamo che valgano le seguenti due condizioni: $P_f(2-5i) = 0$ e $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 2$. Determinare $a, b, c, d$ in modo tale che $P_f(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$.