

FALG – ICM
20/01/2021

M. LONGO

Esercizio 1 (2 punti). Determinare le soluzioni nel campo dei numeri complessi dell'equazione $X^5 = 7$. Quante di queste soluzioni sono numeri reali? Disegnare sul piano cartesiano le soluzioni.

Esercizio 2 (4 punti). Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 1, -1, 0)$ e $(1, -1, 0, 1)$, e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare dimensioni e basi di $V \cap W$ e $V + W$.

Esercizio 3 (4 punti). Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ considerare il seguente sistema

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 3y - 5z = -1 \\ -2x - 4y + (k^2 + k + 6)z = k^2 - k \end{cases}.$$

Discutere la soluzione del sistema e in tutti i casi in cui il sistema sia risolubile determinarne la soluzione.

Esercizio 4 (6 punti). Siano V e W due sottospazi di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e sia $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare.

- (a) Dimostrare che il nucleo di f è un sottospazio vettoriale di V .
- (b) Supponiamo che $\dim(V) = n$ con $n \geq 2$, $\dim W = 2$ e $\dim(\ker(f)) = n - 2$. È vero o falso che f è suriettiva? (giustificare la risposta)

Esercizio 5 (8 punti). Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare tutti i valori di a per i quali l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile, e per ciascuno di essi trovare una base di autovettori ed una matrice D diagonale ed una matrice H invertibile tale che $H D H^{-1} = A_a$.
- (b) Determinare tutti i valori di a e di t per i quali il vettore $(1, 1, t)$ è un autovettore di A_a , specificando in ciascun caso quale è l'autovalore corrispondente.

Esercizio 6 (8 punti). Sia r la retta di equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e sia s la retta passante per il punto $(1, 1, 0)$ e parallela al vettore $(1, 0, -1)$.

- (a) Dopo aver stabilito la posizione reciproca di r ed s , determinarne la distanza.
- (b) Sia π il piano contenente s e parallelo al vettore $(0, 1, 1)$. Determinare la proiezione ortogonale di r su π .