FALG ICM
8 GIUGNO 2018

M. LONGO

Esercizio 1 (6 punti)**.** Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori di uno spazio vettoriale V.

(a) Dire cosa significa che i vettori v_1, v_2, v_2 sono linearmente indipendenti. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi in una variabile X di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dimostrare che i vettori $v_1 = 1 + X, v_2 = 1 - X, v_3 = X^2$ sono linearmente indipendenti.

(b) E' vero o falso che se v_1 non è un multiplo né di v_2 né di v_3, e v_2 non è un multiplo di v_3 allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti? Fornire una dimostrazione o un controesempio.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, definire il sistema:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = a + 4 \\ x_1 + (a^2 - a + 1)x_3 = 2 \end{cases}$$

(a) Discutere la risolubilità del sistema al variare di a.

(b) Per tutti i valori per i quali il sistema è risolubile, determinarne una soluzione esprimendola, nel caso in cui non sia unica, nella forma $X_0 + W$ con X_0 una soluzione del sistema e W uno spazio vettoriale.

Esercizio 3 (9 punti)**.** Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ definire l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} -a & a+1 & 0 \\ -a-1 & a+2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Esistono valori di a per i quali $(1, 1, 0)$ è un autovettore?

(b) Posto $a = 1$, trovare tutti gli autospazi di f_1. Dire se f_1 è diagonalizzabile.

(c) Discutere al variare del parametro a la diagonalizzabilità di f_a.

Esercizio 4 (6 punti)**.** Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1)$, e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$.
(b) Trovare una base di $U^\perp$, ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Nello spazio euclideo standard $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per $(1, 1, 1)$ e parallela al vettore $(1, 1, 0)$, e sia s la retta di equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases} .$$

(a) Dopo aver stabilito la posizione reciproca di r ed s, determinarne la distanza.
(b) Sia π il piano contenente s e parallelo al vettore $(0, 0, 1)$. Determinare $\pi \cap r$.