FALG – ICM
8/9/2021

M. LONGO

Ogni esercizio vale 6 punti.

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, consideriamo il sistema

$$\Sigma_a : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + (a^2 - a + 1)z = a + 2. \end{cases}$$

Discutere la soluzione del sistema e in tutti i casi in cui il sistema sia risolubile determinarne la soluzione.

Esercizio 2. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

Per $k = 1$ calcolare gli autospazi di f_k. Discutere poi la diagonalizzabilità di f_k al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $w_1 = (1, -1, 2, 0)$ e $w_2 = (1, 1, 0, 1)$ e sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0. \end{cases} \quad .$$

Trovare dimensioni e basi di $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 4. Sia π il piano di equazione $x + y + z = 1$. Sia r la retta di equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Dimostrare che $r \subseteq \pi$. Trovare tutti i quadrati di lato $\sqrt{2}$ con un vertice nel punto $P = (1, 0, 0) \in r$ ed un lato sulla retta r.

Esercizio 5. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. Supponiamo che $U + W = V$. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ di $U \cap W$. Completiamo $\mathcal{B}$ ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s\}$ di U e ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_t\}$ di W. Dimostrare che l'insieme $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t\}$ è una base di V.