FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
INGEGNERIA INDUSTRIALE
27 GENNAIO 2014

DOCENTE: MATTEO LONGO

Rispondere alle domande di Teoria in modo esauriente e completo. Svolgere il maggior numero di esercizi possibili. Il compito deve essere sufficiente in entrambe le parti, Teoria ed Esercizi. Tempo: 2 ore e 30 minuti.

1. Teoria

Domanda 1. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ ed indichiamo con A la matrice che rappresenta f rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^5$. Supponiamo che f soddisfi le seguenti condizioni:

(1) La dimensione dell'immagine di f è 3.
(2) Esiste un vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5$ tale che $Av = iv$, dove i denota l'unità complessa $i^2 = -1$.
(3) f ha un autovalore reale $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \neq 0$.

Si scriva il polinomio caratteristico di f e si dica se f è diagonalizzabile. La matrice A, vista come matrice a coefficienti in $\mathbb{C}$, è diagonalizzabile? Esiste, in altri termini, una matrice invertibile P a coefficienti complessi tale che PAP^{-1} sia una matrice diagonale?

Soluzione. Il polinomio $F(X)$ che cerchiamo ha coefficienti reali, grado 5, e coefficiente del termine di grado massimo uguale a -1. L'immagine dell'endomorfismo ha dimensione 3, quindi li suo nucleo ha dimensione 2 e da questo concludo che esistono due autovettori linearmente indipendenti che appartengono al suo nucleo. Poichè la molteplicità algebrica è maggiore o uguale di quella geometrica, concludo che X^2 divide $F(X)$. So inoltre che $\alpha \neq 0$ è una sua radice, quindi $(X - \alpha)X^2$ divide $F(X)$. Visto che una matrice che rappresenta f ha i come autovalore, i deve essere anche radice del suo polinomio caratteristico. Quindi i è una radice di $F(X)$ ed utilizzando il fatto che $f(X)$ ha coefficienti reali, concludo che anche $-i$ è una sua radice, e quindi che $(X + i)(X - i) = (X^1 + 1)$ divide $F(X)$. Segue che $X^2(X - \alpha)(X^2 + 1)$ divide $F(X)$, che è un polinomio di grado 5 il cui coefficiente di grado massimo è -1. Quindi, $F(X) = -X^2(X - \alpha)(X^2 + 1)$. Come endomorfismo di $\mathbb{R}^5$, f non è diagonalizzabile, visto che il suo polinomio caratteristico non si fattorizza completamente in $\mathbb{R}$. Come endomorfismo di $\mathbb{C}^5$, è invece diagonalizzabile: l'unica radice di molteplicità algebrica maggiore di 1 è 0, che ha molteplicità algebrica uguale a 2. Sapendo che la sua molteplicità geometrica è esattamente 2, concludo che f, come endomorfismo di $\mathbb{C}^5$, è diagonalizzabile, e quindi la matrice che lo rappresenta è diagonalizzabile come richiesto. □

Domanda 2. Si enunci e dimostri il teorema di Gramm-Schmidt in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.

Domanda 3. Si dimostri che le soluzioni di un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite sono un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il sistema è omogeneo.

2. Esercizi

Esercizio 1. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle matrici a due righe e due colonne a coefficienti reali. Sia $f_a : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$f_a\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & (a^2-2)z + (a^2-1)w \\ -(a+2)y & y(a-1) \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_a che rappresenta l'endomorfismo A rispetto alla base canonica $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ di V.

(b) Dire se esistono valori del parametro a per i quali la matrice A_a è invertibile, e, in caso ve ne siano, calcolarli.

(c) Determinare i valori del parametro a per i quali la matrice A_a è ortogonalmente diagonalizzabile.

(d) Per tutti i valori del parametro a per i quali la matrice A_a risulta ortogonalmente diagonalizzabile, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per A_a. Determinare inoltre una base di V costituita da autovettori per f_a.

Soluzione. La base canonica è mandata nelle matrici $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -(a+2) & a-1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a^2-2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a^2-1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ quindi la matrice che rappresenta f_a è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-2 & a^2-1 \\ 0 & -(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è zero per ogni a, quindi questa matrice non è mai invertibile. Per essere ortogonalmente diagonalizzabile, bisogna che sia simmetrica, ovvero che

$$\begin{cases} a^2 - 2 = -(a+2) \\ a^2 - 1 = a - 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $a = 0$. In questo caso, un semplice calcolo mostra che il polinomio caratteristico è $X^2(X^2-5)$, e gli autospazi associati agli autovalori 0, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ sono, rispettivamente $V_0 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $V_{\sqrt{5}} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5}/5 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $V_{-\sqrt{5}} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}/5 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. □

Esercizio 2. Sia π il piano di equazione $x + y = 2$ e sia r la retta parallela al vettore $(0,0,1)$ e passante per il punto $P = (1,1,1)$. Sia infine Q il punto $(1,1,0)$.

(a) Verificare che la retta r è contenuta nel piano π e che il punto Q appartiene alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta t passante per P, contenuta in π e perpendicolare alla retta r.

(c) Determinare le coordinate dei vertici e la lunghezza dei lati dei quadrati contenuti in π ed aventi P e Q come vertici.

(d) Si scriva l'equazione cartesiana della retta s passante per Q e perpendicolare al piano π.
(e) Si verifichi che le rette s e t sono sghembe, trovando la loro distanza, i punti di minima distanza e la retta di minima distanza.
(f) Trovare l'equazione del fascio di piani contenenti al retta s (ovvero, l'insieme di tutti i piani che contengono la retta s) e, per ciascuno di essi, dire se interseca la retta t e, nel caso in cui la intersechi, determinare la varietà lineare ottenuta con questa intersezione.

Soluzione. Le verifiche richieste sono immediate, visto che P e Q soddisfano l'equazione cartesiana di π e $Q = P - (0,0,1)$ appartiene a r. La retta t ha equazioni parametriche $t : (1,1,1) + \langle v \rangle$, dove il vettore v appartiene a π (quindi se $v = (x,y,z)$ si deve avere $x + y = 0$) ed essere ortogonale a $(0,0,1)$ (quindi $z = 0$). Dunque $v = (1,-1,0)$. Le equazioni cartesiane di t si ricavano immediatamente e sono

$$\begin{cases} z = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

La lunghezza del lato del quadrato è la norma del vettore $P-Q$, che vale 1. Gli altri vertici del quadrato si ottengono sommando ai punti P e Q dei vettori ortogonali a r, di norma 1 e contenuti in π, ovvero un versore del sottospazio direttore di t, che è $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Si ottengono i punti

$$R_\pm = (1,1,1) \pm (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$
$$S_\pm = (1,1,0) \pm (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

letti ordinatamente: i quadrati sono quelli di vertici P, Q, R_+, S_+ e di vertici P, Q, R_-, S_-. La retta s passa per $(1,1,0)$ e ha direzione $(1,1,0)$, essendo $(1,1,0)$ un generatore del sottospazio ortogonale al sottospazio direttore di π. Dunque ricavo facilmente le sue cartesiane:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = y. \end{cases}$$

Il fascio di piani per s è pertanto

$$\mathcal{F}_{a,b} : a(x-y) + bz = 0$$

(dove a e b sono parametri reali, non entrambi nulli) e l'intersezione con la retta t si ottiene studiando il sistema:

$$\begin{cases} ax - ay + bz = 0 \\ z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

la cui matrice incompleta è

$$\begin{pmatrix} a & -a & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la cui matrice completa è e la cui matrice incompleta è

$$\begin{pmatrix} a & -a & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta è 3 se $a \neq 0$ e 2 se $a = 0$ (calcolarne il determinante, ad esempio) mentre il rango della matrice completa è 3 se $a \neq 0$ oppure se $a = 0$ e $b \neq 0$, mentre è 2 solo se $a = b = 0$, caso escluso dalla nostra descrizione del fascio di piani. Concludiamo quindi che il rango della matrice completa è sempre 3 (nei casi in cui $\mathcal{F}_{a,b}$ è effettivamente un piano) e quindi l'intersezione cercata consiste in un punto se $a \neq 0$ e nell'insieme vuoto se $a = 0$ (usare il teorema di Rouchè-Capelli). Risolvendo il sistema, ottengo il punto di intersezione $(1 - b/2a, 1 + b/2a, 1)$. $\square$

Esercizio 3. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}.$$

Sia inoltre W_a il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(a, 2a, -a+1, -1)$, $(0, 0, 0, 1)$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare la dimensione di V ed una sua base.
(b) Determinare, al variare di a, la dimensione di W_a ed il numero minimo di equazioni che descrivono W_a, determinando esplicitamente un insieme di tali equazioni.
(c) Studiare, al variare del parametro a, la dimensione di $T_a := V \cap W_a$.
(d) In tutti i casi in cui T_a non è nullo, determinare una base di T_a e del suo sottospazio ortogonale $T_a^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
(e) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 1, 1, 1)$ su T_a.

Soluzione. V ha dimensione 2, generato da $(1, 0, 1, 1)$ e $(1, -1, 0, 0)$ ad esempio. W_a ha sempre dimensione 2, un insieme minimo di equazioni per descriverlo è quindi 2 (usare Rouchè-Capelli: deve essere la soluzione di un sistema di 4 equazioni, e la dimensione dello spazio di soluzioni è uguale al numero di incognite meno il rango). Due tali equazioni sono, ad esempio,

$$W_a : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2ax - y + 2az = 0 \end{cases}$$

che ottengo sostituendo nell'equazione generica $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ i due generatori di W_a e determinando due equazioni indipendenti (so che me ne bastano due per la discussione precedente). L'intersezione T_a si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ z - w = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 2ax - y + 2az = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2a & -1 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-8a + 2$, che si annulla solo per $a = 1/4$. Quindi, se $a = 1/4$ il rango della matrice è massimo, quindi l'intersezione è nulla (solo il vettore $(0, 0, 0, 0)$, non vuota!) mentre se $a = 1/4$ si verifica facilmente che il rango della matrice ottenuta sostituendo questo valore è 3, e quindi l'intersezione T_a ha dimensione 1. Svolgendo il sistema, si ottiene che un generatore di $T_{1/4}$ è dato dal vettore $w = (1, 2, 3, 3)$. L'ortogonale di $T_{1/4}$ ha dunque dimensione 3 di ottiene risolvendo il sistema $x + 2y + 3z + 3w = 0$; una sua base è data dai vettori $(-2, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$, $(1, 1, -1, 0)$. Il quadrato della norma di w è $1 + 4 + 9 + 9 = 23$, quindi un generatore di norma 1 di T_a è $(1/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23}, 3/\sqrt{23}, 3/\sqrt{23})$. La formula della proiezione si applica quindi facilmente e si ottiene che la proiezione richiesta è (dove indichiamo con $\bullet$ in prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ e con $\cdot$ l'usuale prodotto di uno scalare per un vettore)

$$\Big(1/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23}, 3/\sqrt{23}, 3/\sqrt{23}) \bullet (1, 1, 1, 1)\Big) \cdot (1/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23}, 3/\sqrt{23}, 3/\sqrt{23}) =$$
$$= (9/23, 10/23, 27/23, 27/23).$$

□

Esercizio 4. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $X^5 = 2$.

Soluzione. Notiamo che $2 = 2(\cos(0) + i\sin(0))$. Si applicano quindi le formule note e si ottiene

$$z_i = \sqrt[5]{2}\,(\cos(2k\pi/5) + i\sin(2k\pi5))$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4$. □