FALG INGEGNERIA CHIMICA E DEI MATERIALI
15 FEBBRAIO 2017

MATTEO LONGO

Tempo: 2 ore e 15 minuti. Ciascun esercizio vale 6 punti.

Esercizio 1. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f_a(0,2,2) = (-4,2); \quad f_a(1,-1,0) = (2,1); \quad f_a(1,1,1) = (3,3); \quad f_a(0,0,1) = (-5,a).$$

Per tali valori, determinare una base del nucleo e dell'immagine di f_a.

Svolgimento. Tra i vettori di $\mathbb{R}^3$ vale la relazione $(0,0,1) = (0,2,2) + (1,-1,0) - (1,1,1)$, quindi la stessa relazione deve valere per linearità anche tra le immagini di questi vettori tramite f_a; otteniamo quindi la relazione $(-5,0) = (-5,a)$, da cui risulta $a = 0$. Poich''e i vettori $\{(0,2,2),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare f_0 eisste ed è unica con le condizione assegnate a questi tre vettori. In questo caso, f_0 è chiaramente suriettiva, quindi il nucleo ha dimensione 1. Cercando una relazione linare tra $(-4,2),(2,1)$ e $(3,3)$, risulta $3(-4,2)+18(2,1)-8(3,3) = (0,0)$ si ottiene che il vettore $3(0,2,2)+18(1,-1,0)-8(1,1,1) = (10,-20,-2)$ è un generatore del nucleo. □

Esercizio 2. Discutere al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ la risolubilità del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + (a^2+a)x_3 = a \end{cases}$$

In tutti i casi in cui il sistema è risolubile, trovarne la soluzione ed esprimerla nella forma $S_0 + V$, con $S_0 \in \mathbb{R}^3$ e V un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. La forma ridotta a scalini della matrice completa risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a(a+1) & a \end{pmatrix}$$

da cui risulta dal teorema di risolubilità dei sistemi linari che per $a \neq 0$, $a \neq 1$ il rango della matrice completa ed incompleta coincidono e valgono entrambi 3, per cui la soluzione è unica e vale $\{-a/(a+1), a/(a+1), 1/(a+1)\}$. Se $a = 0$ i ranghi delle matrici completa ed incompleta ancora coincidono, ma valgono entrambi 2, quindi la soluzione esiste ed il sistema onogeneo associato ha soluzione di dimensione 1; un facile calcolo mostra allora che la soluzione in questo caso è $\{(0,0,1)\}+\langle(-1,1,-1)\rangle$. Infine, per $a=-1$ non abbiamo soluzione perchè il rango della matrice completa ‘e 3, mentre quello dell'incompleta è 2. $\square$

Esercizio 3. Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & a & -a+2 \\ 0 & a+2 & -a \\ 0 & a & -a+2 \end{pmatrix}$$

Per tutti i valori per i quali A_a risulta diagonalizzabile, determinare una base di autovettori.

Svolgimento. Un semplice calcolo mostra che il polinomio caratteristico è $P(t)=-t(t-2)^2$ (quindi indipendente da a). Perciò la matrice è diagonalizzabile se e solo se la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 2 è pari a 2, ovvero se e solo se il rango della matrice

$$A_a - 2 = \begin{pmatrix} -2 & a-2 & -a \\ 0 & a & -a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

è 1, e questo chiaramente avviene se e solo se $a=0$. Perciò la matrice risulta diagonalizzabile se e solo se $a=0$. In questo caso, un semplice calcolo mostra che le basi dei due autospazi risultano $\{(1,0,0)\}$ e $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$. $\square$

Esercizio 4. Sia π il piano di equazione $x+y-2z=0$, r la retta passante per il punto $P=(0,1,1)$ e parallela al vettore $(1,-1,1)$ e s la retta di equazioni cartesiane

$$s: \begin{cases} x+z=1 \\ x+y=0 \end{cases} .$$

(a) Trovare la proiezione ortogonale della retta r sul piano π (ovvero, la retta di π i cui punti sono le proiezioni ortogonali dei punti di r su π).
(b) Dopo aver verificato che la retta s e la retta r sono sghembe, trovare la distanza tra r e s.

Svolgimento. Le equazioni di r sono

$$r: \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

e mettendo a sistema con l'equazione del piano π si ottiene $\pi\cap r=(-1/2,3/2,1/2)$. Un punto di r è $Q=(1,0,2)$; la retta t perpendicolare a π passante per Q è

$$(1,0,2)+\langle(1,1,-2)\rangle,$$

che ha equazione cartesiana

$$t: \begin{cases} x-y=1 \\ x+2z=3 \end{cases} ;$$

mettendo a sistema con π ottengo il punto $\pi \cap t = (4/3, 1/3, 5/6)$. La retta cercata è quella passante per questi due punti, ovvero $(-1/2, 3/2, 1/2) + \langle(11, -7, 2)\rangle$. Per la seconda parte, un facile calcolo mostra che le rette r e s non si intersecano. Un generico punto di r è $(1 + a, -1 - a, -a)$ mentre un generico punto di s è $(b, 1 - b, 1 + b)$ quindi un generico vettore che congiunge un punto di r ad un punto di s è $(1 + a - b, -2 - a + b, -a - 1 - b)$. Affinchè sia il vettore di minima distanza, basta imporre che sia ortogonale sia allo spazio direttore di r che a quello di s, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} -a - 1 - b = 0 \\ 1 + a - b + 2 + a - b = 0 \end{cases}$$

una cui soluzione è $a = -5/4$ e $b = 1/4$, che corrisponde ai punti $(-1/r, 1/4, 5/4) \in r$ e $(1/4, 3/4, 5/4) \in s$. Facendo la norma della differenza di questi due punti si ottiene la distanza, pari a $\sqrt{1/2}$. $\square$

Esercizio 5. In ogni versione viene chiesto di svolgere due (preassegnati, qiundi non si possono scegliere) dei seguenti esercizi, la cui soluzione si trova in qualunque testo di algebra lineare e geometria.

(1) Dare la definizione di insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. (Svolgimento: $\{v_1, \dots v_n\}$ vettori di un K-spazio vettoriale V sono detti linearmente indipendenti se $\sum_{i=i}^{n} x_i v_i = 0$ con $x_i \in K$ implica $x_i = 0$ per ogni i.)

(2) Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente affermazione: *Due vettori linearmente indipendenti di* $\mathbb{R}^n$ *sono necessariamente ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di* $\mathbb{R}^n$. (Svolgimento: Falso: controesempio $(1, 2)$ e $(2, 1)$.)

(3) Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente affermazione: *Sia* $f : V \to W$ *una funzione lineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita e siano* v *e* w *due vettori di* V*. Se* v *e* w *sono linearmente indipendenti, allora anche* $f(v)$ *e* $f(w)$ *lo sono.* (Svolgimento: Falso: Ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che manda $(1, 0)$ in $(1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 1)$; in generale, ogni funzione lineare che ha un nucleo non banale fornisce un controesempio.)

(4) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Supponiamo che $f \circ f$ sia l'endomorfismo nullo (cioè $(f \circ f)(v) = f(f(v)) = 0_V$ per ogni $v \in V$). Dimostrare che se λ è un aurovalore di f allora $\lambda = 0$. (Svolgimento: Sia $f(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$. Allora si ha

$$(f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v;$$

ma $(f \circ f)(v) = 0$, quindi $\lambda^2 v = 0$, perciò $\lambda = 0$.

(5) Dare un controesempio o dimostrare la seguente affermazione: *Sia* A *una matrice* $n \times n$ *a coefficienti reali. Se* $\det(A) \neq 0$*, allora* A *è diagonalizzabile.* (Svolgimento: Falso: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e non è diagonalizzabile.)