

June 13, 2022

GEOMETRIA 2 PARTE B
14 GIUGNO 2022

Durata: 2 ore.

Esercizio 1. Sia X uno spazio di Hausdorff e siano K ed L due sottoinsiemi compatti e disgiunti di X (quindi $K \cap L = \emptyset$). Dimostrare che esistono due aperti disgiunti U e V di X tali che $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Esercizio 2. Dopo aver ricordato la definizione di *sottoinsieme denso* di uno spazio topologico, dimostrare che ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ dotato della topologia di Zariski (topologia cofinita) è denso.

Esercizio 3. Dimostrare che il disco chiuso

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è omeomorfo al quadrato

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Esercizio 4. Sia $U = (0, \pi) \times (0, +\infty)$. Definiamo una superficie $\underline{x} : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ tramite la parametrizzazione

$$\underline{x}(u, v) = ((\cos(u) - v \sin(u)), (\sin(u) + v \cos(u)), v).$$

- (a) Calcolare la matrice della prima e della seconda forma fondamentale rispetto alla base canonica $\{x_u, x_v\}$ dello spazio tangente e la curvatura gaussiana di S .

Indichiamo con Q la quadrica affine di equazione $Q : X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$ (nelle coordinate affini X, Y, Z di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, canonicamente identificato a $\mathbb{R}^3$) e con $\tilde{Q}$ la quadrica proiettiva di equazione $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = X_4^2$ (nelle coordinate proiettive $[X_1; X_2; X_3; X_4]$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$). Sia inoltre $\iota : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ la mappa definita da $(x, y, z) \mapsto [x; y; z; 1]$, e indichiamo con $\tilde{S} = \iota(S)$ l'immagine di S in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tramite ι . Dopo aver verificato che $S \subseteq Q$, rispondere alle seguenti domande:

- (b1) S è chiusa in Q ?
- (b2) Q è chiusa in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$?
- (b3) Q è compatta in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$?
- (b4) $\tilde{S}$ è chiusa in $\tilde{Q}$?
- (b5) $\tilde{Q}$ è chiusa in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?
- (b6) $\tilde{Q}$ è compatta in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?